オーディオのための交流理論入門

Ayumi's Lab.

2005 年 5 月 21 日
Revised 2007 年 12 月 8 日

目 次

1 コンデンサ，コイル **5**
1.1 コンデンサ 5
1.2 コイル 7

2 交流—正弦波 **9**

3 コンデンサ，コイルに正弦波を流すと **13**
3.1 コンデンサに正弦波を流す 13
3.2 コイルに正弦波を流す 13
3.3 SPICE によるシミュレーション 14

4 複数の素子を組み合わせた場合 **16**
4.1 SPICE によるシミュレーション 19
4.2 波形を使わずに振幅を求める 20
4.3 任意の位相の 2 つの波形を加算する 26
4.4 ベクトルによる計算例 27
4.4.1 抵抗とコンデンサの並列回路 27
4.4.2 負帰還の微分補償 28

5 複素数 **31**
5.1 ベクトル図ではなぜめんどうなのか 31
5.2 複素数の計算 32
5.2.1 加減算 32
5.2.2 乗除算 33
5.3 正弦波との関係 35
5.4 コンデンサとコイル—複素インピーダンス 36
5.5 もう一度ローパスフィルタ 36
5.6 もう一度微分補償 38
5.7 オイラーの公式 40

6 伝達関数—1 次の場合 **43**
6.1 ローパス特性 43
6.2 ハイパス特性 44
6.3 ハイブースト特性 46
6.4 ローブースト特性 47
6.5 微分補償 3 回目 48
6.6 CR 型 RIAA イコライザ 50

7 伝達関数—2 次の場合 **56**
7.1 判別式が正の場合 56
7.2 判別式が 0 の場合 58
7.3 判別式が負の場合 59
7.4 まとめ 61
7.5 2 段 CR ローパスフィルタ 62
7.6 出力トランスの漏れインダクタンスと浮遊容量 63

8 能動素子の等価回路とポール **66**
8.1 真空管の等価回路 66
8.2 能動素子一般の等価回路 66
8.3 増幅回路の等価回路 66
8.4 中域の等価回路 68
8.5 低域の等価回路 69
8.5.1 数値例 70
8.6 カソードバイパスコンデンサの影響 71
8.6.1 数値例 74
8.7 高域の等価回路—ミラー効果 74
8.7.1 数値例 77
8.8 正確な高域の解析 77
8.8.1 数値例 80
8.8.2 何が起こっているのか? 85
8.9 2 段アンプの特性 86

9 負帰還 **91**
9.1 負帰還の安定性とボーデ線図 92
9.2 時定数が 1 段の回路に負帰還をかける 94
9.2.1 数値例 94
9.3 位相余裕と帰還後の周波数特性 96
9.4 時定数が 2 段の回路に負帰還をかける 99
9.4.1 2 次伝達関数の特性 99
9.4.2 負帰還をかけた特性 102

10 位相補償 **108**
10.1 位相補償の方法 110
10.2 狭帯域化による補償 110
10.3 ステップ補償 113
10.4 ラグリード補償 115
10.5 微分型補償 119

11 出力段の位相補償 **124**
11.1 出力段の特性 124
11.2 1 次側の位相補償 125
11.2.1 数値例 126
11.3 2 次側の位相補償 129
11.3.1 数値例 130

A 公式 **133**
A.1 三角関数 133
A.2 双曲線関数 134
A.3 ラプラス変換 134
A.3.1 1 次低域通過伝達関数 139
A.3.2 2 次低域通過伝達関数 139

はじめに

時間的に変化する信号を回路に与え，その振る舞いを解析する方法には，

- 交流解析
- 過渡解析

があります．

交流解析は，信号として単一の周波数の正弦波を与えたときの，定常的な (=ある程度時間が経過して，状態が変化しなくなった時の) 回路の振る舞いを解析するものです．過渡解析は，変化する任意の信号を与えたときの回路の振る舞いを解析するものです．この 2 つには，密接な関係がありますが，ここでは前者の交流解析のみを取り上げます．

アンプの設計との関連では，交流解析は，ゲインや位相の周波数特性を調べることであり，過渡解析は，方形波を入力して，その出力波形を観測することに相当します．

ここでは，線形回路 (電圧源，電流源，抵抗，コンデンサ，インダクタのみで構成される回路) を扱います．真空管や半導体などの能動素子は非線形な性質を持っています．例えば，ダイオードなら順方向には電流が流れ，逆方向にはほとんど電流が流れません．しかし，順方向にある程度の電流を流しておけば，それに小さな信号を加えた場合，線形の素子として十分に近似することができます．真空管やトランジスタのアンプの場合，信号が小さければ歪みの発生もわずかであり，線形の電圧源や電流源で近似できます．このため，線形回路の解析であっても，応用範囲は広いのです．

ここでは，負帰還を含むアンプの設計に必要な知識のみを扱うので，一般の理論書に載っているような，素子に蓄えられるエネルギーや消費される電力などは扱いません．

これから先の記述には，数式が多く登場します．必要な数学のレベルは，高校 2 年程度の三角関数，微積分です．しかし，数式と図 (グラフ) とシミュレーションを関連づけて説明していこうと思っていますので，三角関数，微積分を理解する必要はありません．それに，三角関数，微積分は，原理を説明するために使うだけで，実際の計算には，ほとんど使いませんので安心してください．

演習には，回路シミュレータとして CircuitMaker Student Version[1]を，計算ソフトとして R[2][3]を使いますが，PSpice や Microsoft Excel 等を使っても同じ結果が出せるでしょう．

[1] http://www.microcode.com/downloads/student.htm
[2] ftp://ftp.u-aizu.ac.jp/pub/lang/R/CRAN/bin/windows/base/rw2010.exe
[3] インストールする際に，Chinese/Japanese/Korean のインストールオプションを選ばないと，メニューが文字化けします．

1　コンデンサ，コイル

ここでは，コンデンサ，コイルに加えた電圧と，流れる電流の関係を調べます．微分・積分の式が出てきますが，これは後で出てくる記号計算の根拠を示すためであって，実際の計算には使いません．

1.1　コンデンサ

図 1のように，コンデンサに一定の電流を流すと，コンデンサの極板に電荷が溜まっていき，電極の電位差 v_C が大きくなっていきます．このようすを，横軸に時間，縦軸に電位差をとってグラ

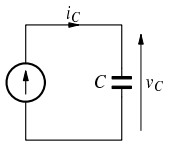

図 1: コンデンサに一定の電流を流す

フで表すと，図 2のようになります．これは，1 F のコンデンサに 1 A の電流を流した場合です．

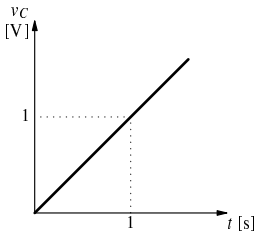

図 2: コンデンサに一定の電流を流した場合の電圧の変化

電流の大きさを変えて SPICE で検証してみましょう．シミュレーションの回路と結果は，図 3のようになります．SPICE では，コンデンサの値として 1F と指定すると，フェムトファラドとして解釈されてしまいますので，注意してください．`.IC` が付いているのは，SPICE の過渡解析における電圧の初期値を指定するものです．

電流を増やす (図 3の E, A, D) と，グラフの傾きが急になります．電流を時間で積分したものが，電極の電位差であるといえます．逆に，電極の電位差を時間で微分したものが，コンデンサを流れる電流といえます．式で表すと，

$$v_C = a \int i_C \, dt \tag{1}$$

$$i_C = \frac{1}{a} \cdot \frac{dv_C}{dt} \tag{2}$$

となります．a は比例定数です．

次に，コンデンサの容量を変えてみます．コンデンサの容量が大きい (図 3の C, A, B) と，同じ電流を流しても電位差の上昇スピードが低くなります．したがって，上述の式の比例定数 a は，コンデンサの容量 C に反比例します．つまり，コンデンサにかかる電圧と電流の関係は，次のよう

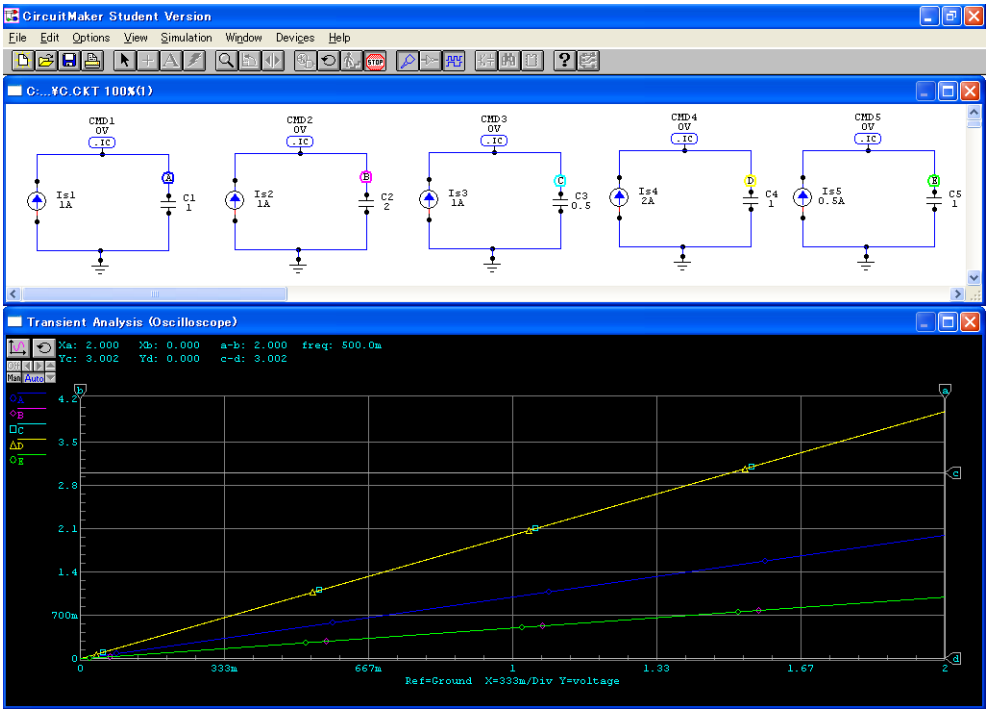

図 3: コンデンサに一定の電流を流すシミュレーション

になります.

$$v_C = \frac{1}{C}\int i_C\, dt \tag{3}$$

$$i_C = C\frac{dv_C}{dt} \tag{4}$$

この式は，正弦波だけでなく，任意の電圧，電流に関して成り立つ基本的な関係です.

1.2 コイル

図 4のように，コイルに一定の電圧をかけると，流れる電流は時間とともに増えていきます．こ

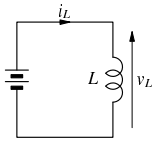

図 4: コイルに一定の電圧をかける

のようすを，横軸に時間，縦軸に電流をとってグラフで表すと，図 5のようになります．これは，

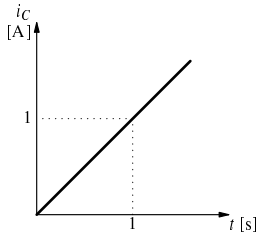

図 5: コイルに一定の電圧をかけた場合の電流の変化

1 H のコイルに 1 V の電圧をかけた場合です．

電圧の大きさを変えて SPICE で検証してみましょう．シミュレーションの回路と結果は，図 6のようになります．SPICE では，電源とコイルを直結すると，直流では無限大の電流が流れてしまいますので，微少な抵抗 (ここでは 1 $\mu\Omega$) を入れます．

電圧を増やす (図 6の E, A, C) と，グラフの傾きが急になります．電圧を時間で積分したものが，流れる電流であるといえます．逆に，コイルを流れる電流を時間で微分したものが，コイルの両端の電圧であるといえます．式で表すと，

$$i_L = b \int v_L \, dt \tag{5}$$

$$v_L = \frac{1}{b} \cdot \frac{di_L}{dt} \tag{6}$$

となります．b は比例定数です．

次に，コイルのインダクタンスを変えてみます．インダクタンスが大きい (図 6の C, A, B) と，同じ電圧をかけても電流の上昇スピードが低くなります．したがって，上述の式の比例定数 b は，コイルのインダクタンス L に反比例します．つまり，コンデンサにかかる電圧と電流の関係は，次のようになります．

$$i_L = \frac{1}{L} \int v_L \, dt \tag{7}$$

$$v_L = L \frac{di_L}{dt} \tag{8}$$

コンデンサの場合と同様に，この式は正弦波だけでなく，任意の電圧，電流に関して成り立つ基本的な関係です．

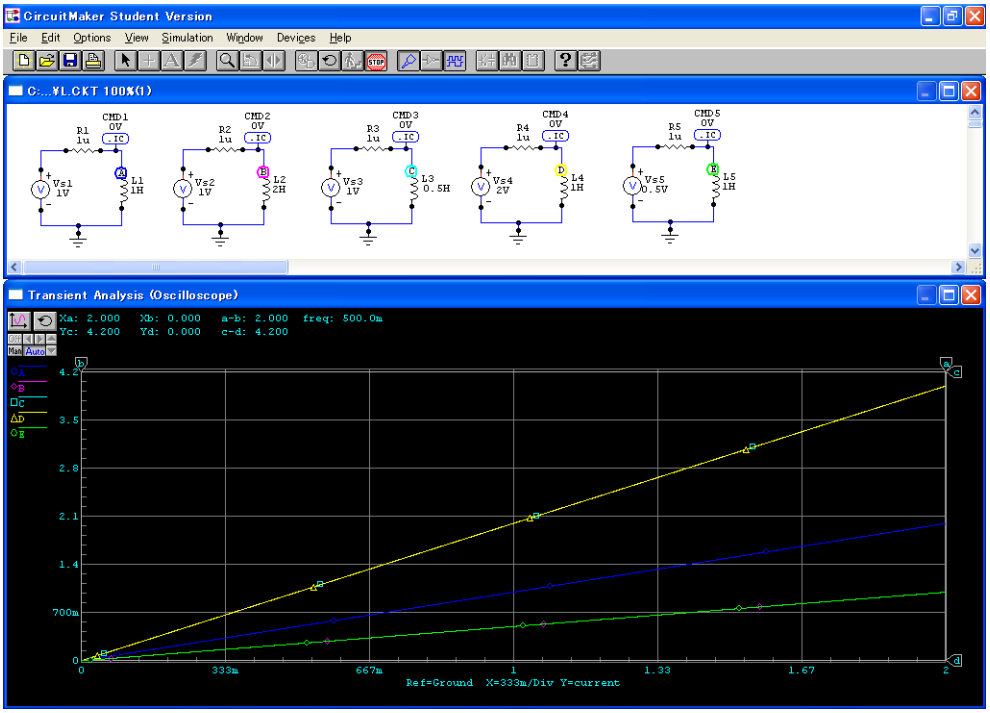

図 6: コイルに一定の電圧をかけるシミュレーション

2　交流—正弦波

交流解析では，単一の周波数の正弦波を扱います．ここでは，正弦波の正体をよく理解しておきましょう．

図 7のように，*x*-*y* 平面の原点 O を中心として，その周りを長さが 1 の棒が一定の速度で反時計方向に回っている状態を考えてください．この棒の先から *y* 軸に垂線を下ろした点を縦軸に，横軸に時間の経過をとってプロットしていくと，正弦波になります (図 8).

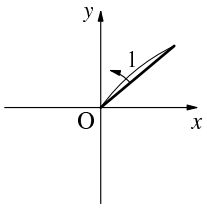

図 7: 原点の周りを回転する棒

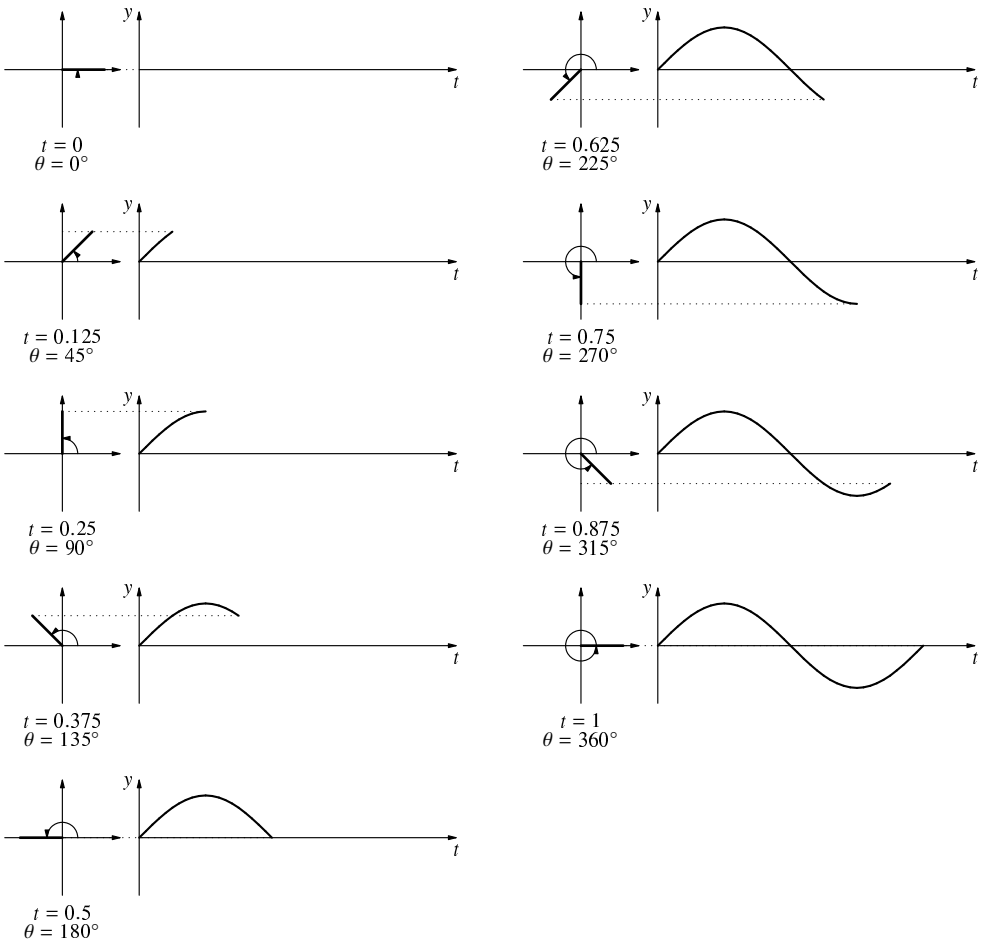

図 8: 正弦波の形成

このとき，この棒が回転する速さを，一秒間に回った回数で表したものが**周波数** (frequency) で，

f で表します．単位はヘルツ [Hz] です．また，一秒間に回った角度で表すこともでき，**角周波数** (angular frequency) といい，ω で表します．角度の単位としてラジアン [rad] を使うのが数学的に便利ですので，角周波数の単位はラジアン毎秒 [rad/s] となります．角度は，x 軸を基準に，反時計方向を正とします．周波数と角周波数の関係は，1 回転が 2π ラジアンなので，

$$\omega = 2\pi f \tag{9}$$

となります．

また，棒が一回転するのにかかった時間を**周期** (period) といい，T で表します．単位は (秒) [s] です．棒が f 回転すると 1 秒ですので，一回転にかかる時間は，

$$T = \frac{1}{f} \tag{10}$$

となります．

この図では，棒の長さが 1 でしたので，生成された正弦波の最大値は 1，最小値は -1 となります．電気では，任意の大きさの正弦波を扱いますので，棒の長さを電圧の場合なら V_m で表すことにします．この V_m を**最大値** (maximum value) または**振幅** (amplitude) といいます．

任意の瞬間の電圧や電流を**瞬時値** (instantaneous value) といい，小文字を使って $v(t)$, $i(t)$ のように表します．(t) を付けない場合もありますが，ここでは時間によって変わる値，すなわち t の関数であることを強調するため，(t) を付けています．一方，振幅 V_m, I_m は時間に依存しない定数です．時刻 t における棒の角度 θ は，

$$\theta = \omega t = 2\pi f t \tag{11}$$

で，これを**位相** (phase) といいます．瞬時値は，

$$v(t) = V_m \sin(\omega t) = V_m \sin(2\pi f t) \tag{12}$$

で表すことができます．

正弦波が一つだけならこれでよいのですが，複数の正弦波を扱う場合は，同じ周波数でも，図 9のようにズレた場合を扱う必要がでてきます．このズレを角度で表したものが位相差です．位相

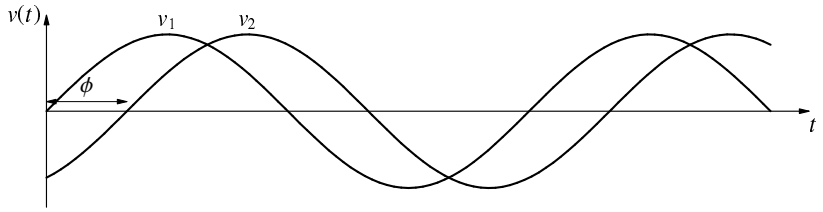

図 9: 位相のずれた正弦波

差は相対的なものであり，どの正弦波を基準にするかは，任意に決めてよいのです．図 9の場合，v_2 は v_1 より遅れている，あるいは，v_1 は v_2 より進んでいるといいます．

位相を含めて瞬時値を表すと，

$$v(t) = V_m \sin(\omega t + \phi) \tag{13}$$

となります．特に，この ϕ は，時刻 0 の棒の角度を表しており，初期位相ということもあります．

ϕ の符号がプラスの場合，この信号は，基準となる信号に対して進んでいるといい，ϕ の符号がマイナスの場合，この信号は，基準となる信号に対して遅れているといいます．

角周波数の単位は [rad/s] でしたが，位相差の単位としては，おもに度 [deg] が使われます．ラジアンが使われることもあります．

まとめ

正弦波は次の式で表されます.

$$v(t) = V_m \sin(\omega t + \phi) \tag{14}$$

$$\begin{aligned} v(t) &= \text{時刻 } t \text{ における (電圧の) 瞬時値} \\ V_m &= \text{最大値または振幅} \\ \omega &= \text{角周波数 } (= 2\pi f) \\ f &= \text{周波数} \\ \phi &= \text{初期位相} \\ \omega t + \phi &= \text{位相} \end{aligned}$$

演習 1

周波数が 50 Hz で，初期位相が +45° の，振幅が 5 V の正弦波を，時刻が 0 から 40 ms まで描け.

回答例 1

R を使って描きます．`q1` という関数を作成することにします．コマンドウィンドウのプロンプト (>) に対して，`fix(q1)` と入力します．これは，`q1` というオブジェクトをエディタで修正 (なければ新規作成) するコマンドです．図 10 のようなウィンドウが開くので，画面の内容が以下のようになるよう，入力していきます．# 以降はコメントですので，面倒なら入力しなくても構いません.

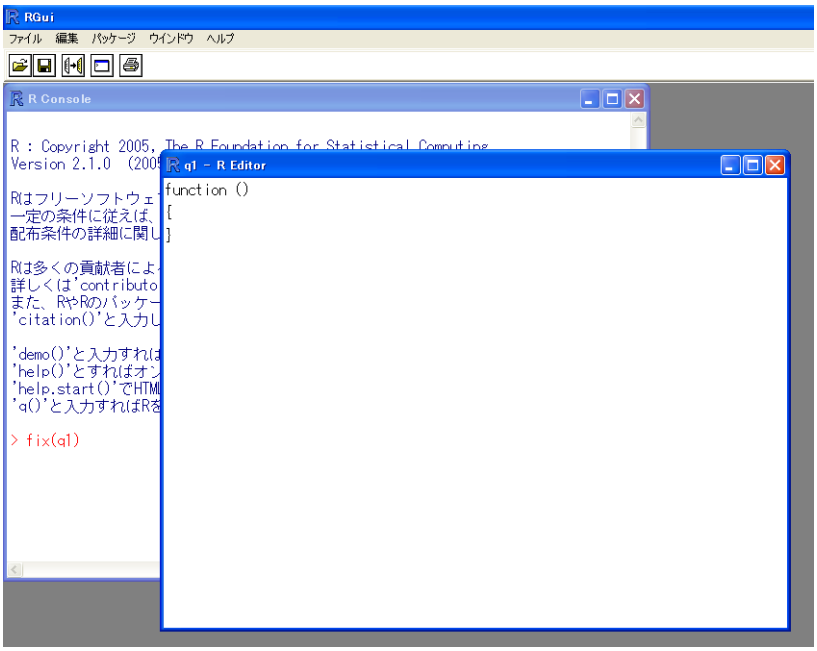

図 10: R のオブジェクト編集ウィンドウ

```
function ()
{
    t <- seq(0, 40e-3, len=200)          # 時刻 (200 点のベクトル)
    f <- 50                  # 周波数
    Vm <- 5                  # 振幅
    phi <- 45 * pi / 180     # 初期位相
    v <- Vm * sin(2 * pi * f * t + phi) # 瞬時値 (200 点)
    plot(t, v, type="l")     # グラフを描く
}
```

seq は等差数列を作成する関数，plot は *xy* 平面の 2 次元グラフを描く関数です.

入力が終わったら，ウィンドウを閉じるアイコンをクリックすると，内容を保存するかどうか尋ねてきますので，“はい” を選択します.

今作成した関数の内容は，プロンプトに対して関数名を入力すると確認できます.

```
> q1
function ()
{
    t <- seq(0, 40e-3, len=200)          # 時刻 (200 点のベクトル)
    f <- 50                  # 周波数
    Vm <- 5                  # 振幅
    phi <- 45 / 180 * pi     # 初期位相
    v <- Vm * sin(2 * pi * f * t + phi) # 瞬時値 (200 点)
    plot(t, v, type="l")     # グラフを描く
}
>
```

関数を実行するには，引数を指定するかっこを付けます．今回の場合，引数がないので，かっこのみを後ろに付けます.

```
> q1()
>
```

グラフは別のウィンドウに表示されます.

表計算ソフトでは，たとえば図 11のようにすればよいでしょう.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1											
2		振幅 (Vm)	5	V							
3		周波数 (f)	50	Hz							
4		初期位相 (ϕ)	45	deg		0.79	rad				
5		終了時刻	4.00E-02	s							
6		分割数	200								
7											
8		index	t		theta	t	v				
9		0	0.00E+00		0.79	0.00E+00	3.54				
10		1	2.00E-04		0.85	2.00E-04	3.75				
11		2	4.00E-04		0.91	4.00E-04	3.95				
12		3	6.00E-04		0.97	6.00E-04	4.14				
13		4	8.00E-04		1.04	8.00E-04	4.3				
14		5	1.00E-03		1.1	1.00E-03	4.46				
15		6	1.20E-03		1.16	1.20E-03	4.59				
16		7	1.40E-03		1.23	1.40E-03	4.7				
17		8	1.60E-03		1.29	1.60E-03	4.8				
18		9	1.80E-03		1.35	1.80E-03	4.88				
19		10	2.00E-03		1.41	2.00E-03	4.94				
20		11	2.20E-03		1.48	2.20E-03	4.98				
21		12	2.40E-03		1.54	2.40E-03	5				
22		13	2.60E-03		1.6	2.60E-03	5				
23		14	2.80E-03		1.67	2.80E-03	4.98				
24		15	3.00E-03		1.73	3.00E-03	4.94				
25		16	3.20E-03		1.79	3.20E-03	4.88				
26		17	3.40E-03		1.85	3.40E-03	4.8				
27		18	3.60E-03		1.92	3.60E-03	4.7				
28		19	3.80E-03		1.98	3.80E-03	4.59				
29		20	4.00E-03		2.04	4.00E-03	4.46				
30		21	4.20E-03		2.1	4.20E-03	4.3				
31		22	4.40E-03		2.17	4.40E-03	4.14				
32		23	4.60E-03		2.23	4.60E-03	3.95				

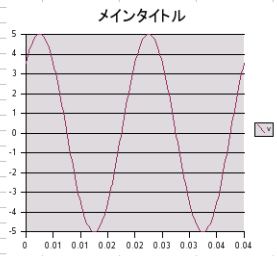

図 11: 表計算ソフトで正弦波を描く

3　コンデンサ，コイルに正弦波を流すと

3.1　コンデンサに正弦波を流す

コンデンサに初期位相が 0 の正弦波を加えたときに流れる電流を計算します．式 (4) に式 (12) を代入すると，

$$i_C = C\frac{dV_m \sin(\omega t)}{dt} = V_m \omega C \cos(\omega t) \tag{15}$$

となります[4]．これは，振幅が $V_m\omega C$ の余弦波です．波形は，図 12のようになります．

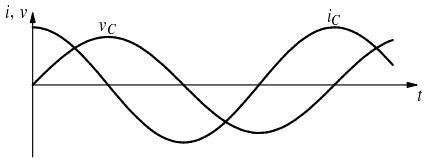

図 12: コンデンサに正弦波を加えたときの波形

オームの法則と同様にして，抵抗値に相当するコンデンサのリアクタンス X_C を計算します．

$$X_C = \frac{|v_C|}{|i_C|} = \frac{V_m}{V_m\omega C} = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\pi f C} \tag{16}$$

となり，見慣れた式が出てきました．ちなみに，コンデンサの容量性リアクタンスの符号はマイナスなのですが，ここではとりあえず絶対値だけに注目しました．

余弦波は，時刻 0 で最大値をとり，これは正弦波が最大値をとる位相 90° の時刻より 90° 分先に進んでいるので，電流の位相は，電圧よりも 90° 進んでいると言われます．

3.2　コイルに正弦波を流す

式 (7) に式 (12) を代入すると，

$$i_L = \frac{1}{L}\int V_m \sin(\omega t)\,dt = -\frac{V_m}{\omega L}\cos(\omega t) \tag{17}$$

となります．これは，振幅が $V_m\omega L$ の余弦波です (符号はマイナスです)．すなわち，電流の位相は，電圧よりも 90° 遅れています．波形は，図 13のようになります．

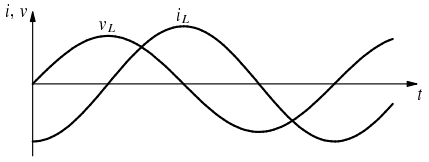

図 13: コイルに正弦波を加えたときの波形

オームの法則と同様にして，抵抗値に相当するコイルのリアクタンス X_L を計算します．

$$X_L = \frac{|v_C|}{|i_C|} = \frac{V_m\omega L}{V_m} = \omega L = 2\pi f L \tag{18}$$

[4] $\omega t = y$ とおくと，

$$\frac{d\sin(\omega t)}{dt} = \frac{d\sin y}{dy}\cdot\frac{dy}{dt} = \cos y \cdot \omega = \omega\cos(\omega t)$$

となり，見慣れた式が出てきました．

3.3 SPICE によるシミュレーション

正弦波の電圧源に，コンデンサとコイルをそれぞれ接続し，流れる電流を測定します．回路と結果は，図 14のようになります．

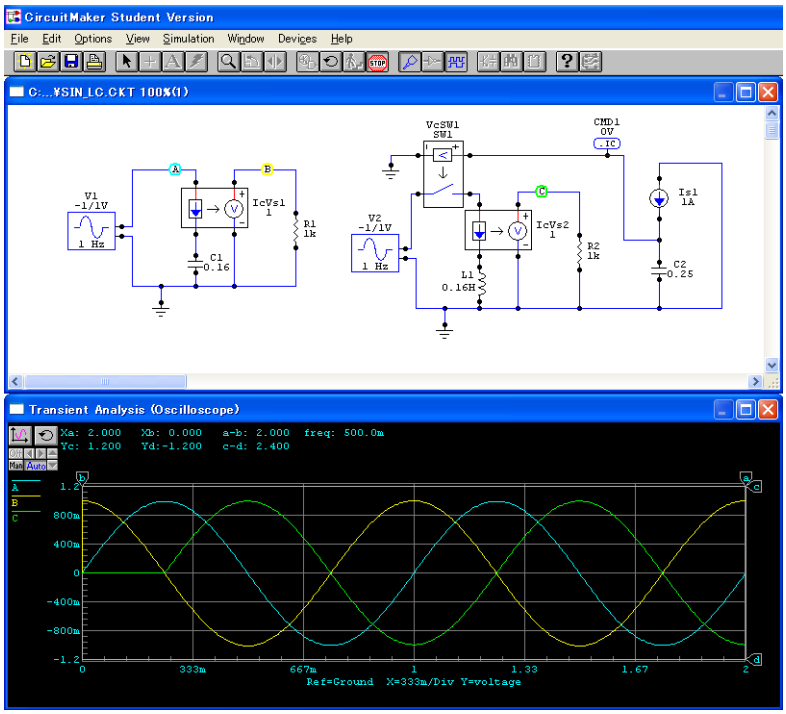

図 14: コンデンサ，コイルに正弦波を加える

コンデンサに流れる電流を測定するのに，プローブをコンデンサの電流端子 (?) に置けばよいように思われますが，CircuitMaker でこのようにすると，極性が逆になってしまうようです．そこで，電流制御電圧源 `IcVs1` を使って，回路を流れている電流を電圧に変換し，電圧の値として取り出しています．変換の係数は 1 としていますから，1 A の電流が 1 V の電圧に変換されます．

コイルのほうはさらにやっかいになっています．定常状態をいきなり作り出すために，電圧の最大値になったところで，回路を閉じて電流を流します．そのためのタイマーが `C2` で，`Is1` から一定の電流を流し，コンデンサの電圧が 1 V になったらスイッチ `VcSW1` が閉じます．電流は 1 A, 容量が 0.25 F なので，0.25 秒後にスイッチが閉じます．`VcSW1` のモデル `SW1` は，1 V でスイッチが閉じ，そのときの抵抗は 1 $\mu\Omega$ となるように設定してあります (図 15).

コンデンサを流れる電流 (B) は，電圧 (A) よりも位相が 90° 進んでおり，コイルを流れる電流 (C) は，電圧よりも位相が 90° 遅れていることがわかります．

コイルのほうは，電圧源 `V2` ではなく電流源を使えば，この例のようにスイッチを使う必要はありません．ぜひ試してみてください．その場合，回路の中にごく小さな抵抗を入れるのを忘れないでください．また，コイルの場合は，プローブの電流端子を使えるので，`IcVs2` を使う必要はありません．また，この回路のままで，スイッチの部分を取り除いたらどのような波形になるか，試し

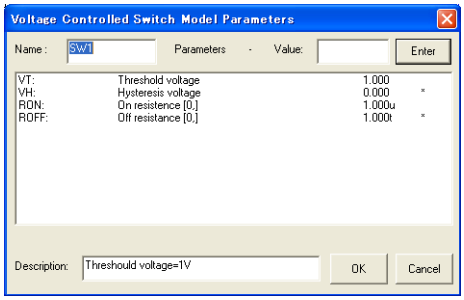

図 15: スイッチのパラメータの設定

てみてください.

電流の大きさを計算してみましょう．コンデンサの容量は 0.16 F ですから，1 Hz におけるリアクタンス X_C は,

$$X_C = \frac{1}{2\pi f C} = \frac{1}{2\pi \cdot 1 \cdot 0.16} \approx 1\ [\Omega] \tag{19}$$

したがって，電流 (の振幅) は,

$$I_{Cm} = \frac{V_m}{X_C} = \frac{1}{1} = 1\ [\mathrm{A}] \tag{20}$$

となります.

同様に，コイルのインダクタンスは 0.16 H ですから，1 Hz におけるリアクタンス X_L は,

$$X_L = 2\pi f L = 2\pi \cdot 1 \cdot 0.16 \approx 1\ [\Omega] \tag{21}$$

したがって，電流 (の振幅) は,

$$I_{Lm} = \frac{V_m}{X_L} = \frac{1}{1} = 1\ [\mathrm{A}] \tag{22}$$

となります.

演習 2

図 14の例で，周波数を 2 Hz にしたり，0.5 Hz にしたときに，電流の大きさがどのようになるか予想し，シミュレーションで確かめましょう.

4　複数の素子を組み合わせた場合

図 16のように，抵抗 R とコンデンサ C を直列に接続し，電圧 v_i を加えます．このとき，コンデンサの両端を出力として，この電圧 $v_o = v_C$ を求めます．

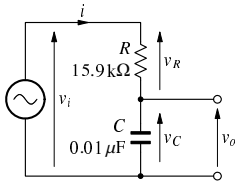

図 16: 抵抗とコンデンサを直列に接続した場合

この回路はローパスフィルターです．同じ入力電圧 v_i を与えても，周波数によって出力の大きさ (と位相) が変わってきます．

このように素子が直列に組み合わされている場合，流れる電流は共通ですから，電流に着目して解析するのが簡単です．v_i として何ボルトかけたのか不明ですが，この回路に振幅が 1 mA の電流が流れたとしましょう．周波数は 1 kHz とします．

抵抗 R の両端には，オームの法則により，

$$V_{Rm} = I_m R = 1 \times 10^{-3} \cdot 15.9 \times 10^{3} = 15.9\,[\mathrm{V}] \tag{23}$$

の電圧が生じています．この電圧の位相は，電流の位相と同じです．

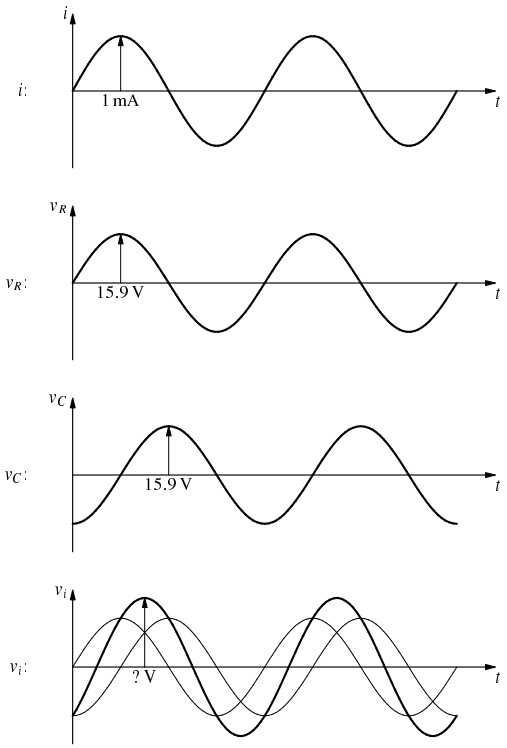

図 17: 各部の波形

コンデンサ C の両端の電圧は，コンデンサのリアクタンス X_C が

$$X_C = \frac{1}{2\pi fC} = \frac{1}{6.28 \cdot 1000 \cdot 0.01 \times 10^{-6}} \approx 15.9\,[\mathrm{k\Omega}] \tag{24}$$

より，

$$V_{Cm} = I_m X_C = 1 \times 10^{-3} \cdot 15.9 \times 10^{3} = 15.9\,[\mathrm{V}] \tag{25}$$

となります．ただし，コンデンサの両端の電圧の位相は，電流よりも 90° 遅れています．

この回路に加えられていた電圧の瞬時値 v_i は，抵抗の両端の電圧の瞬時値 v_R と，コンデンサの両端の電圧の瞬時値 v_C を加えたものになります．

$$v_i = v_R + v_C \tag{26}$$

まずは，数値的に調べてみましょう．ここでは，R を使います．

```
function ()
{
    f <- 1e3                    # 周波数
    T <- 1/f                    # 周期
    t <- seq(0, 2*T, len=201)           # 2 周期分
    i <- 1e-3 * sin(2 * pi * f * t)     # 電流の瞬時値
    vR <- 15.9 * sin(2 * pi * f * t)    # 抵抗の両端の電圧の瞬時値
    vC <- -15.9 * cos(2 * pi * f * t)   # コンデンサの両端の電圧の瞬時値
    vi <- vR + vC                       # 入力電圧の瞬時値
    par(mfrow=c(2, 1))          # グラフを 2 行 1 列にならべて描く
    plot(t, i, type="l")        # 電流の波形
    matplot(t, cbind(vR, vC, vi), type="l", lty=1, col=2:4,
        ylab="vR, vC, vi")      # 電圧の波形
}
```

実行結果は，図 18のようになります．赤い線が抵抗の両端の電圧，緑の線がコンデンサの両端の電圧，青い線が入力電圧です．この結果を見ると，入力電圧の振幅は 22.5 V くらいに見えます．したがって，入力電圧を 1 V とすれば，出力電圧 (コンデンサの両端の電圧) は 15.9/22.5 = 0.71 V くらいになります．

演習 3

図 16の回路で，

- 2 kHz で振幅が 1 mA の電流が流れているとき，入力電圧の振幅は何ボルトか?
- 2 kHz で振幅が 1 V の電圧を加えたとき，出力電圧の振幅は何ボルトか?
- 500 Hz で振幅が 1 mA の電流が流れているとき，入力電圧の振幅は何ボルトか?
- 500 Hz で振幅が 1 V の電圧を加えたとき，出力電圧の振幅は何ボルトか?

回答例 3

R を使って，先ほどの関数を少し変えて，周波数や抵抗などの値を変更しやすくします．

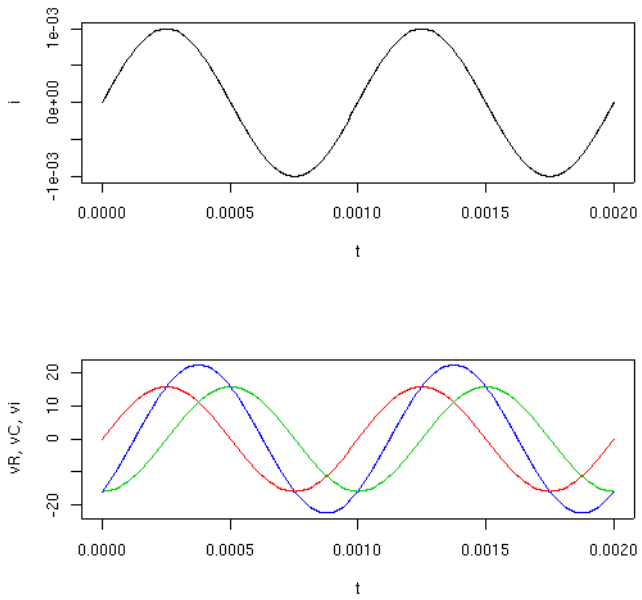

図 18: R による合成波形

```
function(f=1e3, R=15.9e3, C=0.01e-6)
{
    # f: 周波数 (Hz)
    # R: 抵抗値 (ohm)
    # C: 容量 (F)

    T <- 1/f                # 周期
    t <- seq(0, 2*T, len=201)       # 2 周期分
    Im <- 1e-3                      # 電流の振幅
    VRm <- Im * R                   # 抵抗の両端の電圧の振幅
    XC <- 1 / (2 * pi * f * C)      # コンデンサのリアクタンス
    VCm <- Im * XC                  # コンデンサの両端の電圧の振幅
    cat("VRm=", VRm, "\n", sep="")  # 表示
    cat("XC=", XC, "\n", sep="")
    cat("VCm=", VCm, "\n", sep="")
    i <- Im * sin(2 * pi * f * t)   # 電流の瞬時値
    vR <- VRm * sin(2 * pi * f * t) # 抵抗の両端の電圧の瞬時値
    vC <- -VCm * cos(2 * pi * f * t)# コンデンサの両端の電圧の瞬時値
    vi <- vR + vC                   # 入力電圧の瞬時値
    Vim <- max(vi)                  # 入力電圧の振幅
    cat("Vim=", Vim, "\n", sep="")
    cat("Vo/Vim=", VCm/Vim, "\n", sep="")   # ゲイン
    par(mfrow=c(2, 1))              # グラフを 2 行 1 列に並べて描く
    plot(t, i, type="l")            # 電流の波形
    matplot(t, cbind(vR, vC, vi), type="l", lty=1, col=2:4,
        ylab="vR, vC, vi")          # 電圧の波形
}
```

function のかっこの中に書かれている変数は，仮引数で，関数を実行する際に変更することができます．= の後ろにある値は，引数が指定されなかった場合のデフォルトの値となります．この関

数を ac42 という名前で作成したとすると，ac42(R=22e3) のように仮引数の名前 (一部でよい) と値を指定してやれば，その引数だけ値を変更できます．指定しなかった引数は，デフォルトの値が使用されます．

```
> ac42(2e3)
VRm=15.9
XC=7957.747
VCm=7.957747
Vim=17.77499
Vo/Vim=0.4476934
> windows()          # もう一つグラフウィンドウを開く
> ac42(500)
VRm=15.9
XC=31830.99
VCm=31.83099
Vim=35.57143
Vo/Vim=0.894847
```

関数 windows() (Linux の場合は X11()) を使えば，グラフウィンドウを追加で開くことができ，複数のグラフを比較できます．

4.1 SPICE によるシミュレーション

図 19に，SPICE によるシミュレーションを示します．CircuitMaker では，私が不慣れなせいか

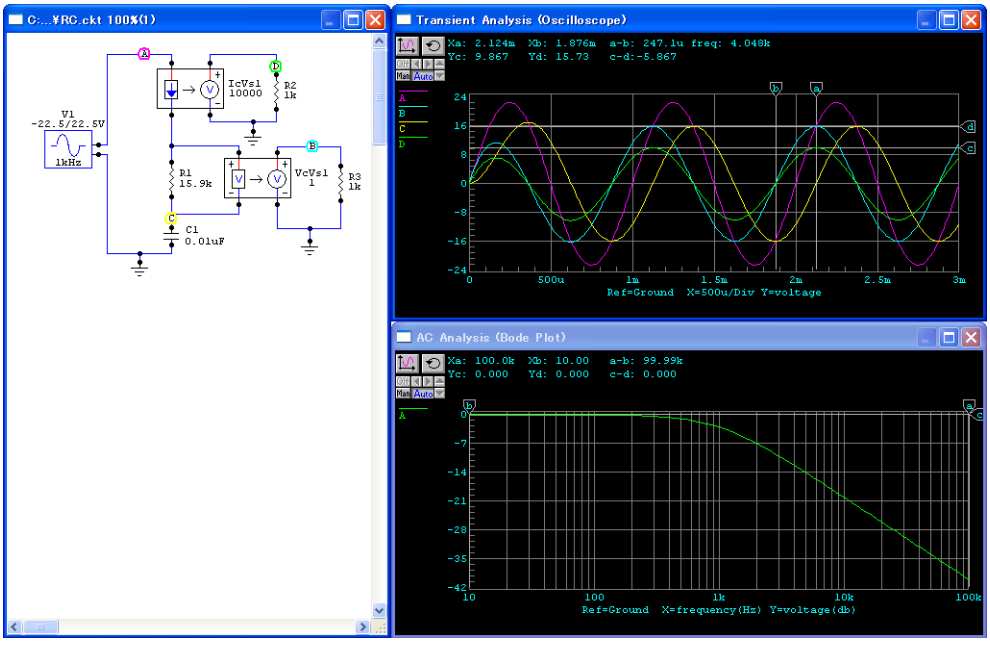

図 19: ローパスフィルタのシミュレーション

もしれませんが，2 点間の電圧のグラフを表示する方法がないようです．VcVs1 を使って，2 点間の電位差を対グラウンドの電圧に変換しています．また念のため，回路を流れる電流は，IcVs1 で電圧に変換して取り出しています．この係数として 10000 を指定しているので，1 mA が 10 V としてグラフに表示されます．

波形をみると，2 周期目でほぼ定常状態になっているようです．電流の波形 (D) と抵抗の両端の電圧の波形 (B) は位相が合っています．コンデンサの両端の波形 (C) は，電流に比べて位相が 90° 遅れています．入力電圧の波形 (A) は，電流に比べて位相が 45° 遅れているようです．振幅の関係は，R で計算したものと同じになっています．

4.2 波形を使わずに振幅を求める

このように，瞬時値を使えば，この回路の入力電圧や出力電圧を求めることができますが，とても手間がかかります．一度，三角関数の性質を使って，各部の電圧や電流の振幅や位相の関係を検討しておけば，簡単に計算することができるようになります．ただし，この節で説明した方法で実際の計算をすることもありません．

電流を基準にとり，その初期位相を 0 とすれば，電流の瞬時値は，

$$i = I_m \sin(\omega t) \tag{27}$$

で表すことができます．抵抗の両端の電圧の瞬時値は，オームの法則から，

$$v_R = iR = I_m R \sin(\omega t) \tag{28}$$

となります．コンデンサの両端の電圧の瞬時値は，式 (3) に式 (27) を代入して，

$$v_C = \frac{1}{C}\int i\,dt = \frac{I_m}{C}\int \sin(\omega t)\,dt = -\frac{I_m}{\omega C}\cos(\omega t) \tag{29}$$

となります．これらから，入力電圧の瞬時値は，

$$v_i = v_R + v_C = I_m R \sin(\omega t) - \frac{I_m}{\omega C}\cos(\omega t) = V_{Rm}\sin(\omega t) - V_{Cm}\cos(\omega t) \tag{30}$$

となります．この式は，周波数が同じ正弦波と余弦波 (符号がマイナスですが) を足し合わせたものであり，結果はさまざまな位相をとる正弦波になります．

ここで，正弦波と余弦波を任意の比率で足し合わせた波形がどうなるかを見てみましょう．瞬時値 v を式で表すと，

$$v = a\sin\theta + b\cos\theta \tag{31}$$

となります．a, b は負であっても構いません．

a を x 軸に，b を y 軸にとると，図 20のような長方形ができます．対角線 OC の長さは，三平方の定理より，

$$\mathrm{OC} = \sqrt{a^2 + b^2} \tag{32}$$

となります．OC と x 軸のなす角度 ϕ は，

$$\tan\phi = \frac{b}{a} \tag{33}$$

です．

これらを使って a, b を表すと，

$$\begin{aligned} a &= \sqrt{a^2 + b^2}\cos\phi \\ b &= \sqrt{a^2 + b^2}\sin\phi \end{aligned}$$

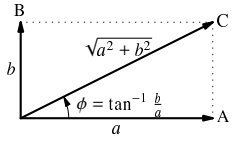

図 20: 正弦波，余弦波の振幅と合成波の振幅

となりますから，式 (31) は，

$$\begin{aligned} v &= a\sin\theta + b\cos\theta \\ &= \sqrt{a^2+b^2}\,\cos\phi\sin\theta + \sqrt{a^2+b^2}\,\sin\phi\cos\theta \\ &= \sqrt{a^2+b^2}\,\sin(\theta+\phi) \\ &= \sqrt{a^2+b^2}\,\sin\left(\theta + \tan^{-1}\frac{b}{a}\right) \end{aligned} \tag{34}$$

となり，合成波の振幅は $\sqrt{a^2+b^2}$，初期位相は $\tan^{-1}(b/a)$ であることがわかります．

ここで，正弦波と余弦波を任意の比率で足し合わせた波形がどうなるかを，R で確かめてみましょう．プログラムは少々長くなりますが，以下の通りです．

```
function (a=1, b=1)
{
    # a: 正弦波の振幅
    # b: 余弦波の振幅

    th <- seq(-2*pi, 2*pi, len=201)         # 位相
    s <- a * sin(th)                        # 正弦波波形
    c <- b * cos(th)                        # 余弦波波形
    z <- s + c                              # 合成波波形
    cat("max(z)=", max(z), "\n", sep="")    # 合成波の振幅 (波形から)
    Vm <- sqrt(a^2 + b^2)                   # 合成波の振幅 (解析的)
    cat("Vm=", Vm, "\n", sep="")
    phi <- atan2(b, a)*180/pi               # 合成波の初期位相
    cat("phi=", phi, "\n", sep="")

    par(mfrow=c(2, 1))                      # グラフを 2 行 1 列で描く

    # 波形
    matplot(th*180/pi, cbind(s, c, z), type="l", lty=1, col=2:4,
        xaxs="i", xaxt="n",
        xlab="Phase (deg)", ylab="Instantaneous value")
    axis(1, at=seq(-360, 360, by=90), lab=FALSE, tck=1, col="gray")
    axis(1, at=seq(-360, 360, by=90))       # 目盛を自分の好みで描く
    box()                                   # 周りが灰色になるのでワクを描き直す
    abline(h=0)                             # 水平線を引く
    abline(v=-phi, col=4)                   # 合成波の立ち上がり点
    arrow(0, -Vm, -phi, -Vm, col=4)
    text(-phi/2, -0.9*Vm, format(round(phi, 1)), col=4)

    # ベクトル図
    m <- max(abs(c(a, b)))                  # ベクトル図のスケールを決める
    lim <- m * c(-1.2, 1.2)
    par.org <- par(pty="s")                 # 正方形のグラフを描く
    plot(0, 0, type="n", xlim=lim, ylim=lim,
        xlab="x", ylab="y")                 # スケールの設定のみ
```

```
    abline(h=0)                                  # 水平線
    abline(v=0)                                  # 垂直線
    arrow(0, 0, a, 0, col=2)                     # 正弦波のベクトル表示
    text(a, -0.1*m, format(signif(a, 3)), col=2)
    arrow(0, 0, 0, b, col=3)                     # 余弦波のベクトル表示
    text(-0.1*m, b, format(signif(b, 3)), col=3, adj=1)
    arrow(0, 0, a, b, col=4)                     # 合成波のベクトル表示
    text(a*1.1, b*1.1, format(signif(Vm, 3)), col=4)
    par(par.org)                                 # グラフパラメータを元に戻す
}
```

このプログラムでは，いくつか標準ではない関数が使われています．この関数を使うために，メニューの ファイル → R コードのソース... を使用して，http://ayumi.cava.jp/audio/elec_win.r を読み込んでください (図 21)．このようにして読み込まれた関数は，R を終了するときに作業スペー

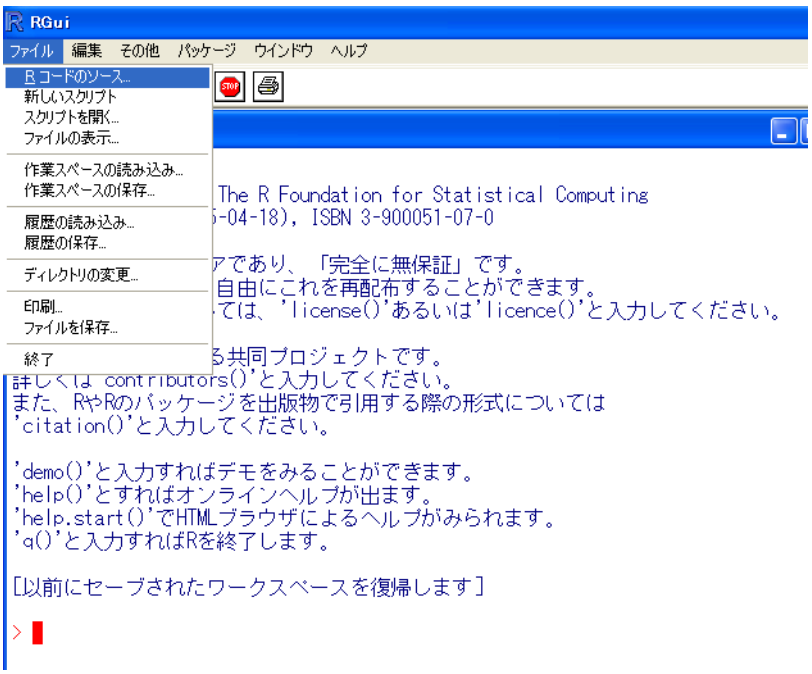

図 21: R コードの読み込み

ス (image) を保存しておけば，次回からは自動的に使えるようになります (図 22)．

位相を求めるのに，atan() ではなく atan2(y, x) を使っていますが，こちらを使うと角度を $-\pi$ から π の範囲で求められます．グラフを描くときに xaxt="n" とすると，x 軸の目盛は自動で描かれません．axis() で自分の好きなように目盛を付けられます．abline() で，垂直線 (v=) や水平線 (h=)，あるいは任意の $y = a+bx$ という直線を描くことができます．text() で，グラフ上に文字列を描けます．format() は，表示用に適切に丸めた文字列を返します．ふつう，format() は複数の数値の表示桁数を揃えるのに使い，桁数が少ない場合は，先頭に空白が付加されます．par(pty="s") で，グラフを実際に描く領域が正方形になります．

この関数の名前を ac43 とすると，

```
> ac43(1.732, 1)
max(z)=1.999517
Vm=1.999956
```

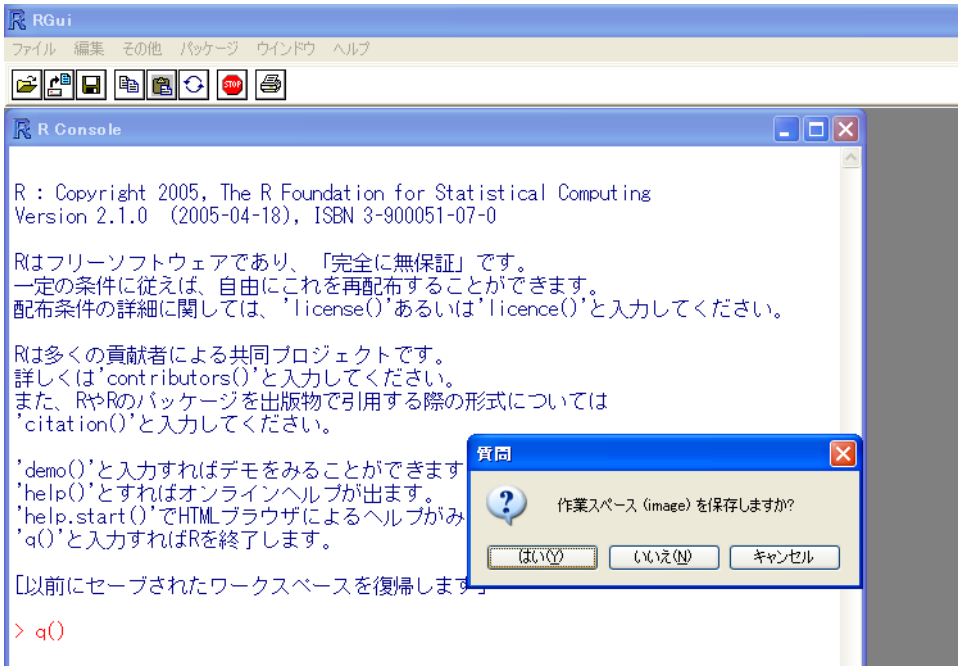

図 22: 作業スペースの保存

```
phi=30.00073
```

のようにして使います．実行結果を図 23に示します．

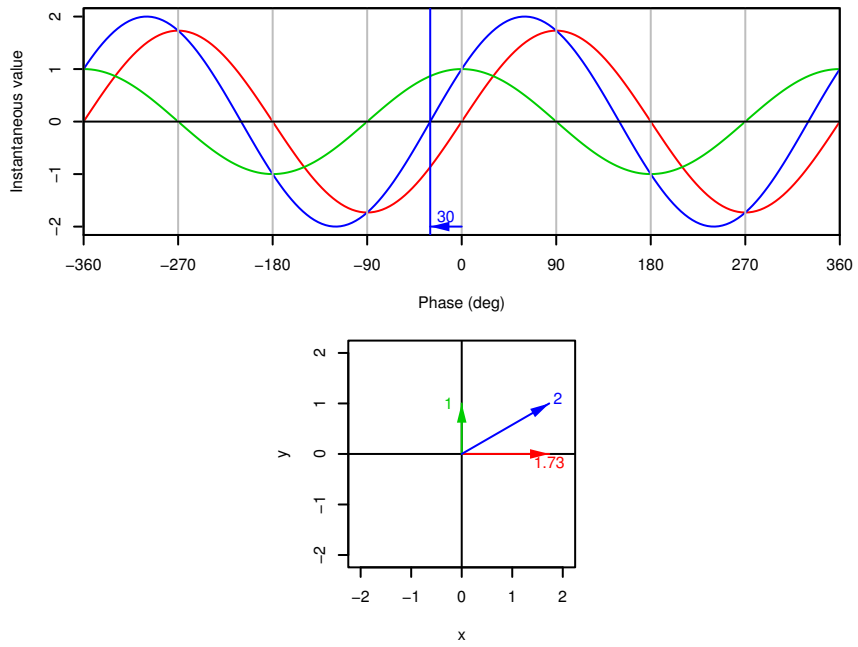

図 23: 正弦波，余弦波の合成

さて，この結果を使うと，式 (30) を次のように書き換えることができます．

$$\begin{aligned} v_i &= V_{Rm}\sin(\omega t) - V_{Cm}\cos(\omega t) \\ &= \sqrt{V_{Rm}^2 + V_{Cm}^2}\,\sin(\omega t + \phi) \\ &= V_{im}\sin(\omega t + \phi) \\ V_{im} &= \sqrt{V_{Rm}^2 + V_{Cm}^2} = \sqrt{(I_m R)^2 + (\frac{I_m}{\omega C})^2} = I_m\sqrt{R^2 + \frac{1}{(\omega C)^2}} \\ \tan\phi &= -\frac{V_{Cm}}{V_{Rm}} = -\frac{\frac{I_m}{\omega C}}{I_m R} = -\frac{1}{\omega C R} \end{aligned}$$

これを図で表すと，図 24のようになります (図中の電圧は，必ずしも最大値でなくても (たとえば実効値) よいので，$_m$ を付けていません)．

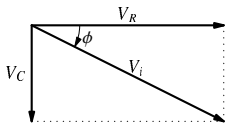

図 24: 合成波の振幅と位相は，ベクトル図で求められる

電流を基準にしたとき，入力電圧は ϕ だけ進んでいます．この場合，ϕ の符号は負になるので，入力電圧は電流よりも位相が遅れています．

求めたかったのは，入力と出力の関係なので，入力電圧を基準にすると，電流は ϕ だけ遅れており (実際は ϕ が負なので進んでおり)，出力の位相は電流よりも 90° 遅れます．つまり，図 24の矢印の向きは，それぞれの電圧の初期位相を表していることになります．

ここで基準を入力電圧にします．つまり，V_i を右向きにします．すると図 25のようになります．この図からわかるように，抵抗の両端の電圧は，入力電圧より $\phi_1 = \tan^{-1}(V_C/V_R)$ だけ進んでおり，

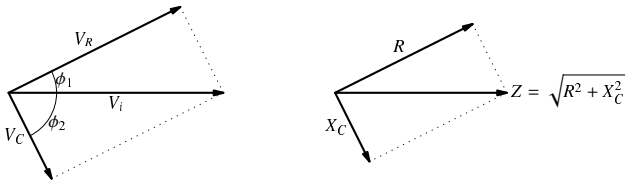

図 25: 入力電圧を基準にする

コンデンサの両端の電圧は，入力電圧より $\phi_2 = \tan^{-1}(V_R/V_C)$ 遅れています．この回路のゲイン A は，入力に対する出力の大きさで定義され，

$$A = \frac{V_o}{V_i} = \frac{V_C}{V_i} \tag{35}$$

です．これらを，抵抗値や容量，周波数によって表すと，

$$\begin{aligned} A &= \frac{V_C}{V_i} \\ &= \frac{I_m X_C}{I_m\sqrt{R^2 + \frac{1}{(\omega C)^2}}} \end{aligned}$$

$$= \frac{\frac{1}{\omega C}}{\sqrt{R^2 + \frac{1}{(\omega C)^2}}} \tag{36}$$

$$\begin{aligned} \phi_2 &= \tan^{-1}\frac{V_R}{V_C} \\ &= \tan^{-1}\frac{I_m R}{I_m X_C} \\ &= \tan^{-1}\frac{R}{1/\omega C} \\ &= \tan^{-1}(\omega C R) \end{aligned} \tag{37}$$

ここでは，ϕ_2 は**遅れ**を表していることに注意してください．また，入力電圧 V_i を流れる電流 I で割ったものは，この回路の抵抗 (正確にはインピーダンス) であり，

$$Z = \frac{V_i}{I} = \frac{I_m\sqrt{R^2 + X_C^2}}{I_m} = \sqrt{R^2 + X_C^2} \tag{38}$$

となります．

この回路では，流れている電流がどこでも同じため，各部の電圧の比率は，そのまま各部のインピーダンスの比率になります (図 25の右側)．つまり，回路を流れる電流を仮定しなくても，インピーダンスの比率を求め，ベクトル図を作図できます．そして，

$$V_o = \frac{X_C}{Z}V_i = \frac{X_C}{\sqrt{R^2 + X_C^2}}V_i \tag{39}$$

で，入力電圧に対する出力電圧を求めることができます．

これで，このローパスフィルタのゲインと位相の周波数特性を描くことができます．R で描いてみましょう．

```
function ()
{
    R <- 15.9e3         # 抵抗値
    C <- 0.01e-6        # 容量

    f <- dec(10, 100e3, 30)     # 周波数 (対数で，10 倍あたり 30 点ずつ)
    w <- 2 * pi * f             # 角周波数 (omega と書くのは大変なので w を使用)
    XC <- 1/(w * C)             # コンデンサのリアクタンス
    A <- XC / sqrt(R^2 + XC^2)  # ゲイン
    phi <- atan(-w * C * R)     # 位相 (進みが正)

    par(mfrow=c(2, 1))
    semilogplot(f, dB(A), type="l", col="red",
        xlab="Frequency (Hz)", ylab="Gain (dB)")
    semilogplot(f, phi*180/pi, type="l", col="red",
        xlab="Frequency (Hz)", ylab="Phase (deg)")
}
```

`dec(from, to, n)` は，周波数などとして使う等比数列を生成する関数で，`from` から `to` まで，10 倍ごとに `n` 点きざみの等比数列を生成します．`semilogplot` は，横軸が対数で，縦軸が通常のグラフを描く関数です．`dB(x)` は，$20\log_{10}(x)$ を返す関数です．

4.3 任意の位相の 2 つの波形を加算する

前節の回路では，互いに 90° 位相の異なる波形を足し合わせました．その結果の波形の振幅は，それぞれの波形の振幅が縦と横の長さである長方形の対角線の長さであり，位相差は，対角線とそれぞれの辺とでなす角で表されます．この節では，任意の初期位相を持つ 2 つの波形の加算が，同様に平行四辺形の対角線で表されることを示します．

振幅が V_1 初期位相が ϕ_1 の正弦波 v_1 と，振幅が V_2 初期位相が ϕ_2 の正弦波 v_2 を加えた結果を v_3 とします．この v_3 の振幅 V_3 と初期位相 ϕ_3 を求めます．

$$v_1 = V_1 \sin(\omega t + \phi_1) \tag{40}$$

$$v_2 = V_2 \sin(\omega t + \phi_2) \tag{41}$$

$$v_3 = V_3 \sin(\omega t + \phi_3) \tag{42}$$

$v_3 = v_1 + v_2$ より，

$$\begin{aligned} v_3 &= V_1 \sin(\omega t + \phi_1) + V_2 \sin(\omega t + \phi_2) \\ &= V_1 \cos\phi_1 \sin(\omega t) + V_1 \sin\phi_1 \cos(\omega t) \\ &\quad + V_2 \cos\phi_2 \sin(\omega t) + V_2 \sin\phi_2 \cos(\omega t) \\ &= (V_1 \cos\phi_1 + V_2 \cos\phi_2)\sin(\omega t) + (V_1 \sin\phi_1 + V_2 \sin\phi_2)\cos(\omega t) \end{aligned} \tag{43}$$

一方，

$$v_3 = V_3 \sin(\omega t + \phi_3) = V_3 \cos\phi_3 \sin(\omega t) + V_3 \sin\phi_3 \cos(\omega t) \tag{44}$$

より，係数を比較して，

$$V_3 \cos\phi_3 = V_1 \cos\phi_1 + V_2 \cos\phi_2 \tag{45}$$

$$V_3 \sin\phi_3 = V_1 \sin\phi_1 + V_2 \sin\phi_2 \tag{46}$$

図 26より明らかなように，V_3 の大きさと初期位相は，V_1, V_2 をベクトルと見立てて加えたもので表せます．つまり，任意の時刻の瞬時値を加え合わせた波形の振幅と位相は，2 つの波形の振幅と

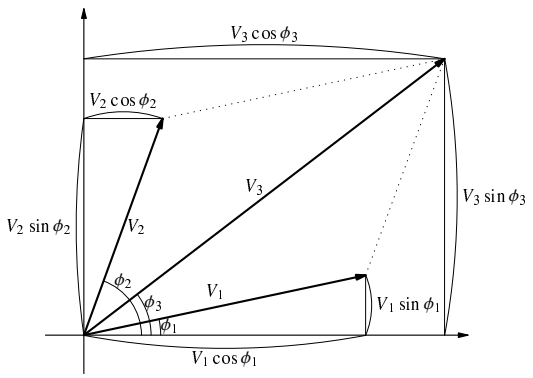

図 26: 2 つの正弦波の加算

初期位相の情報だけで決まり，ベクトルとみて加え合わせたものが，合成された波形の振幅と初期位相になります．時間とともに変化する部分 (ωt) は，影響しません．

具体的に振幅と位相を求めると，図より，

$$
\begin{aligned}
V_3 &= \sqrt{(V_1\cos\phi_1 + V_2\cos\phi_2)^2 + (V_1\sin\phi_1 + V_2\sin\phi_2)^2} \\
&= \sqrt{V_1^2\cos^2\phi_1 + 2V_1V_2\cos\phi_1\cos\phi_2 + V_2^2\cos^2\phi_2 + V_1^2\sin^2\phi_1 + 2V_1V_2\sin\phi_1\sin\phi_2 + V_2^2\sin^2\phi_2} \\
&= \sqrt{V_1^2 + V_2^2 + 2V_1V_2(\cos\phi_1\cos\phi_2 + \sin\phi_1\sin\phi_2)} \\
&= \sqrt{V_1^2 + V_2^2 + 2V_1V_2\cos(\phi_1 - \phi_2)} \qquad (47)
\end{aligned}
$$

$$
\phi_3 = \tan^{-1}\frac{V_1\sin\phi_1 + V_2\sin\phi_2}{V_1\cos\phi_1 + V_2\cos\phi_2} \qquad (48)
$$

となります．

4.4 ベクトルによる計算例

先に進む前に，ここで示したベクトルによる計算をいくつかやってみましょう．

4.4.1 抵抗とコンデンサの並列回路

次のような，抵抗とコンデンサが並列に接続された回路に，400 Hz, 5 V の交流電圧を加えたときに流れる電流を求めます．

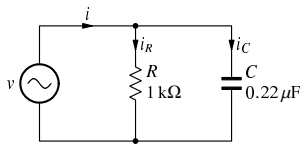

図 27: 抵抗とコンデンサを並列に接続した回路に流れる電流

この回路の場合，各素子にかかっている電圧は，すべて等しく v ですので，この位相を基準にします．抵抗を流れる電流 i_R の位相は電圧の位相と同じで，大きさは，

$$
I_R = \frac{V}{R} = \frac{5}{1000} = 5\,[\mathrm{mA}] \qquad (49)
$$

です．コンデンサのリアクタンス X_C は，

$$
X_C = \frac{1}{2\pi fC} = \frac{1}{6.28\cdot 400\cdot 0.22\times 10^{-6}} = 1810\,[\Omega] \qquad (50)
$$

ですから，コンデンサを流れる電流の大きさは，

$$
I_C = \frac{V}{X_C} = \frac{5}{1810} = 2.76\,[\mathrm{mA}] \qquad (51)
$$

コンデンサを流れる電流は，電圧より位相が 90° 進んでいるので，ベクトル図は 28のようになります．

流れる電流の大きさ I は，

$$
I = \sqrt{I_R^2 + I_C^2} = \sqrt{5^2 + 2.76^2} = \sqrt{32.6} = 5.7\,[\mathrm{mA}] \qquad (52)
$$

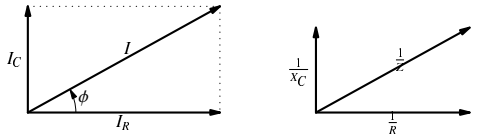

図 28: 抵抗とコンデンサを並列に接続した回路のベクトル図

であり，電流の位相は電圧より

$$\phi = \tan^{-1}\frac{I_C}{I_R} = \tan^{-1}\frac{2.76}{5} = 29\,[^\circ] \tag{53}$$

進んでいます.

4.4.2 負帰還の微分補償

図 29は，負帰還の微分補償で使われる回路です．R_1 は帰還抵抗で，これに並列に C を入れることにより，高域の負帰還量が増えます．この回路の入力 (アンプの出力) と出力 (アンプの入力部に帰還される信号) の関係を調べましょう．あらかじめ断っておきますが，この解析は大変複雑になります．ベクトル図による方法は，この程度の回路で，もはや使い物にならないことがわかるでしょう.

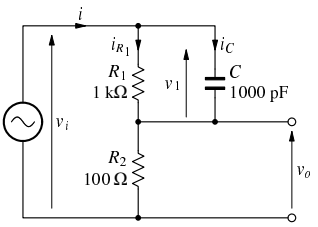

図 29: 負帰還の微分補償

この回路は複雑なので，部分部分に分けて解析していきます．まず，R_1 の両端の電圧を v_1 として，R_1 と C の並列接続に注目します．v_1 の位相を基準とすると，R_1 を流れる電流 i_{R_1} の位相は v_1 と同じです．コンデンサを流れる電流の位相は v_1 より 90° 進んでいます．したがってベクトル図は，図 30の左のようになります.

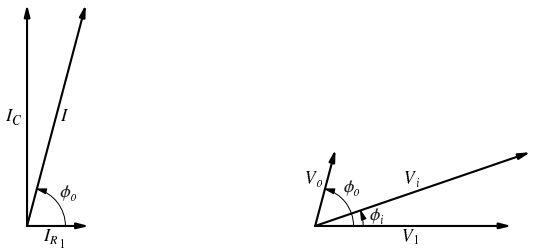

図 30: 微分補償のベクトル図

ここまでの関係から，

$$X_C = \frac{1}{2\pi f C}$$

$$
\begin{aligned}
I_C &= \frac{V_1}{X_C} \\
I_{R_1} &= \frac{V_1}{R_1} \\
I &= \sqrt{I_{R_1}^2 + I_C^2} = V_1 \sqrt{\frac{1}{R^2} + \frac{1}{X_C^2}}
\end{aligned}
$$

となります.

出力 v_o は，i が R_2 を流れて生じる電圧なので，その位相は i と同じで，v_1 よりも ϕ_1 進んでいます．入力電圧 v_i は，v_1 と v_o を加えた物ですから，そのベクトル図は，図 30の右のようになります．出力の位相は，入力よりも $(\phi_o - \phi_i)$ だけ進んでいます.

$$
V_o = IR_2 \tag{54}
$$

$$
V_i = \sqrt{V_o^2 + V_1^2 + 2V_oV_1\cos\phi_o} \tag{55}
$$

$$
\phi_i = \tan^{-1}\frac{V_o\sin\phi_o}{V_1 + V_o\cos\phi_o} \tag{56}
$$

最後の 2 つの式は，式 (47) と式 (48) を使っています.

ゲインを求めてみましょう．式 (54) より,

$$
\begin{aligned}
V_o &= V_1R_2\sqrt{\frac{1}{R^2} + \frac{1}{X_C^2}} \\
V_1 &= \frac{V_o}{R_2\sqrt{\frac{1}{R^2} + \frac{1}{X_C^2}}}
\end{aligned}
$$

これを式 (55) に代入して,

$$
V_i = \sqrt{V_o^2 + \frac{V_o^2}{R_2^2(\frac{1}{R^2} + \frac{1}{X_C^2})} + \frac{2V_o^2}{R_2\sqrt{\frac{1}{R^2} + \frac{1}{X_C^2}}}\cos\phi_o}
$$

図 30より,

$$
\cos\phi_o = \frac{I_{R_1}}{I} = \frac{\frac{V_1}{R_1}}{V_1\sqrt{\frac{1}{R^2} + \frac{1}{X_C^2}}} = \frac{1}{R_1\sqrt{\frac{1}{R^2} + \frac{1}{X_C^2}}}
$$

なので,

$$
\begin{aligned}
V_i &= \sqrt{V_o^2 + \frac{V_o^2}{R_2^2(\frac{1}{R_1^2} + \frac{1}{X_C^2})} + \frac{2V_o^2}{R_1R_2(\frac{1}{R_1^2} + \frac{1}{X_C^2})}} \\
&= V_o\sqrt{1 + \frac{1}{R_2^2(\frac{1}{R_1^2} + \frac{1}{X_C^2})} + \frac{2}{R_1R_2(\frac{1}{R_1^2} + \frac{1}{X_C^2})}} \\
&= V_o\sqrt{\frac{R_1R_2^2(\frac{1}{R_1^2} + \frac{1}{X_C^2}) + R_1 + 2R_2}{R_1R_2^2(\frac{1}{R_1^2} + \frac{1}{X_C^2})}} \\
&= V_o\sqrt{\frac{\omega^2R_1^2R_2^2C^2 + (R_1 + R_2)^2}{\omega^2R_1^2R_2^2C^2 + R_2^2}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
V_o &= V_i \sqrt{\frac{\omega^2 R_1^2 R_2^2 C^2 + R_2^2}{\omega^2 R_1^2 R_2^2 C^2 + (R_1 + R_2)^2}} \\
&= V_i \frac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot \sqrt{\frac{\omega^2 R_1^2 C^2 + 1}{\omega^2 (R_1 // R_2)^2 C^2 + 1}}
\end{aligned} \tag{57}
$$

となります．もっとうまい整理のしかたがあるとは思いますが，このように任意の周波数に対する応答を求めようとするのは，大変な作業になります．

5　複素数

5.1　ベクトル図ではなぜめんどうなのか

前節で使ったベクトル図では，ベクトルの長さが正弦波の振幅を，方向が正弦波の初期位相を表していました．ベクトルの長さは計算で求められましたが，方向は図の上で表していました．特に，コンデンサやコイルによって，位相が 90° ずれることを，数式としてではなく，図で表していました．

位相を変化させることは，数式でも表せます．図 31のように，振幅が r，初期位相が ϕ の正弦波の位相を θ だけ進めることを考えましょう．

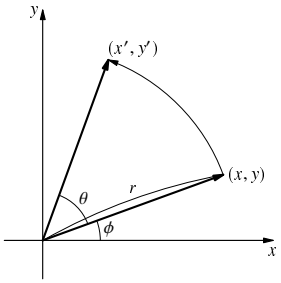

図 31: ベクトルの回転

図より，

$$x = r\cos\phi \tag{58}$$

$$y = r\sin\phi \tag{59}$$

$$x' = r\cos(\phi+\theta) \tag{60}$$

$$y' = r\sin(\phi+\theta) \tag{61}$$

加法定理を使うと，

$$\begin{aligned} x' &= r\cos(\phi+\theta) \\ &= r\cos\phi\cos\theta - r\sin\phi\sin\theta \\ &= x\cos\theta - y\sin\theta \end{aligned} \tag{62}$$

$$\begin{aligned} y' &= r\sin(\phi+\theta) \\ &= r\cos\phi\sin\theta + r\sin\phi\cos\theta \\ &= x\sin\theta + y\cos\theta \end{aligned} \tag{63}$$

これを行列を使って表すと，

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{64}$$

となります．一応，数式で表せたのですが，行列を使わねばなりません．

これまで，xy 平面を使ってきましたが，y 軸を虚数とすることで，このめんどうなベクトルの回転の計算が，単純な掛け算になってしまいます．複素数を使うことによって，たとえば電圧と電流の関係を，その大きさだけでなく，位相を含めてオームの法則と同様な式で表すことができるようになります．

5.2 複素数の計算

複素数 (complex number) は，実数 a と虚数 jb[5] を組み合わせた数です．すなわち，

$$Z = a + jb \qquad \text{(直角座標表示またはガウス平面表示)} \tag{65}$$

です．j は，虚数単位で，

$$j^2 = -1 \tag{66}$$

です．複素数は，横軸に実数軸，縦軸に虚数軸をとった**複素平面**上の点を表していると考えられます．与えられた Z から，実数部 a および虚数部 b を取り出す操作を，次の式で表します．

$$a = \Re Z \tag{67}$$

$$b = \Im Z \tag{68}$$

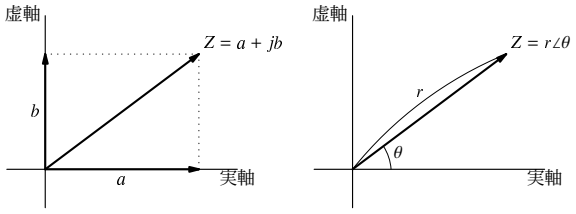

図 32: 複素数の表示

また，複素平面上の点は，原点 O からの距離 r と，実数軸からの角度 θ で表すこともできます．

$$Z = r\angle\theta \qquad \text{(ベクトル表示)} \tag{69}$$

r を Z の**大きさ**または**絶対値** (absolute value) といい，θ を Z の**偏角** (angle) といいます．これらは，それぞれ正弦波の振幅，(初期) 位相です．与えられた Z から大きさや偏角を取り出す操作を，次の式で表します．

$$r = |Z| \tag{70}$$

$$\theta = \arg Z \tag{71}$$

複素数の直角座標表示とベクトル表示を比較すると，次の関係がわかります．

$$r = \sqrt{a^2 + b^2} \tag{72}$$

$$\tan\theta = \frac{b}{a} \tag{73}$$

$$a = r\cos\theta \tag{74}$$

$$b = r\sin\theta \tag{75}$$

5.2.1 加減算

$Z_1 = a + jb$ と $Z_2 = c + jd$ を加えると，

$$Z_3 = Z_1 + Z_2 = (a + jb) + (c + jd) = (a + c) + j(b + d) \tag{76}$$

[5] 数学では虚数単位は i ですが，電気では電流に i を使うため，虚数単位として j を使います．

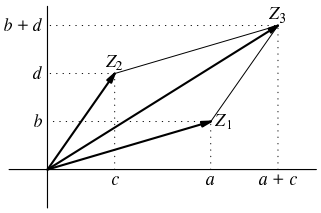

図 33: 複素数の加算

5.2.2 乗除算

$Z_1 = a + jb$ と $Z_2 = c + jd$ を掛け合わせると，

$$\begin{aligned} Z_3 &= Z_1 Z_2 \\ &= (a + jb)(c + jd) \\ &= ac + jad + jbc + j^2 bd \\ &= (ac - bd) + j(ad + bc) \end{aligned}$$

Z_1, Z_2, Z_3 をベクトル表示にすると，

$$\begin{aligned} r_1 &= |Z_1| = \sqrt{a^2 + b^2} \\ \theta_1 &= \arg Z_1 = \tan^{-1} \frac{b}{a} \\ r_2 &= |Z_2| = \sqrt{c^2 + d^2} \\ \theta_2 &= \arg Z_2 = \tan^{-1} \frac{d}{c} \\ r_3 &= |Z_3| = \sqrt{(ac - bd)^2 + (ad + bc)^2} \\ &= \sqrt{a^2c^2 - 2abcd + b^2d^2 + a^2d^2 + 2abcd + b^2c^2} \\ &= \sqrt{a^2c^2 + b^2d^2 + a^2d^2 + b^2c^2} \\ &= \sqrt{(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)} \\ &= r_1 r_2 \\ \theta_3 &= \arg Z_3 = \tan^{-1} \frac{ad + bc}{ac - bd} \\ &= \tan^{-1} \frac{ad/ac + bc/ac}{1 - bd/ac} \\ &= \tan^{-1} \frac{d/c + b/a}{1 - (b/a)(d/c)} \\ &= \tan^{-1} \frac{\tan\theta_1 + \tan\theta_2}{1 - \tan\theta_1 \tan\theta_2} \\ &= \tan^{-1} \tan(\theta_1 + \theta_2) \\ &= \theta_1 + \theta_2 \end{aligned}$$

となるので，複素数の乗算は，大きさを掛け合わせ，偏角を加えることになります．すなわち，

$$Z_3 = Z_1 Z_2 = (r_1 \angle\theta_1)(r_2 \angle\theta_2) = r_1 r_2 \angle(\theta_1 + \theta_2) \tag{77}$$

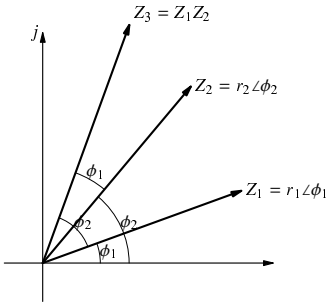

図 34: 複素数の乗算

割り算の場合は,

$$
\begin{aligned}
Z_3 &= \frac{Z_1}{Z_2} \\
&= \frac{a+jb}{c+jd} \\
&= \frac{a+jb}{c+jd} \cdot \frac{c-jd}{c-jd} \\
&= \frac{(ac+bd)+j(bc-ad)}{c^2+d^2} \\
&= \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + j\frac{bc-ad}{c^2+d^2} \\
r_3 &= \frac{\sqrt{(ac+bd)^2+(bc-ad)^2}}{c^2+d^2} \\
&= \frac{\sqrt{a^2c^2+2abcd+b^2d^2+b^2c^2-2abcd+a^2d^2}}{c^2+d^2} \\
&= \frac{\sqrt{a^2c^2+b^2d^2+b^2c^2+a^2d^2}}{c^2+d^2} \\
&= \frac{\sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)}}{c^2+d^2} \\
&= \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{c^2+d^2}} \\
&= \frac{r_1}{r_2} \\
\theta_3 &= \tan^{-1}\frac{bc-ad}{ac+bd} \\
&= \tan^{-1}\frac{bc-ad}{ac+bd} \\
&= \tan^{-1}\frac{bc/ac-ad/ac}{1+bd/ac} \\
&= \tan^{-1}\frac{b/a-d/c}{1+(b/a)(d/c)} \\
&= \tan^{-1}\frac{\tan\theta_1-\tan\theta_2}{1+\tan\theta_1\tan\theta_2} \\
&= \tan^{-1}\tan(\theta_1-\theta_2) \\
&= \theta_1-\theta_2
\end{aligned}
$$

これより，複素数の割り算は，大きさを割り算し，偏角は引き算したものになります．すなわち，

$$Z_3 = \frac{Z_1}{Z_2} = \frac{r_1\angle\theta_1}{r_2\angle\theta_2} = \frac{r_1}{r_2}\angle(\theta_1 - \theta_2) \tag{78}$$

まとめると，

$$|Z_1 \cdot Z_2| = |Z_1| \cdot |Z_2| \tag{79}$$

$$\arg(Z_1 \cdot Z_2) = \arg Z_1 + \arg Z_2 \tag{80}$$

$$\left|\frac{Z_1}{Z_2}\right| = \frac{|Z_1|}{|Z_2|} \tag{81}$$

$$\arg\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right) = \arg Z_1 - \arg Z_2 \tag{82}$$

となります．

5.3 正弦波との関係

これまでと同じように，原点の周りを長さが V_m の棒が反時計方向に回っているとします．時刻 0 における棒の大きさと向きは，$V_m\angle\phi$ であり，時刻 t における棒の向きは，その位相をさらに ωt 進めたものですから，

$$V_m\angle(\omega t + \phi) = (V_m\angle\phi) \cdot (1\angle\omega t) \tag{83}$$

で表せます．正弦波の瞬時値は，棒の先の y 軸方向の高さなので，複素数平面では，虚数成分を取り出すことになり，

$$v(t) = \Im\{(V_m\angle\phi) \cdot (1\angle\omega t)\} \tag{84}$$

で表せます．

このように，振幅と初期位相がわかれば，任意の時刻における瞬時値を求めることができるので，振幅と初期位相によるベクトル表示をもって，正弦波を表すことにします[6]．

$$\dot{V} = V_m\angle\phi \tag{85}$$

正弦波の振幅は，複素数 $\dot{V}$ の絶対値になります．初期位相は，複素数 $\dot{V}$ の偏角になります．

$$V_m = |\dot{V}| \tag{86}$$

$$\phi = \arg\dot{V} \tag{87}$$

位相を θ 進めることは，$1\angle\theta$ を掛けることになります．特に，位相を 90° 進めることは，

$$1\angle 90^\circ = \cos 90^\circ + j\sin 90^\circ = 0 + 1j = j \tag{88}$$

を掛けることになります．位相を 90° 遅らせることは，

$$1\angle(-90^\circ) = \cos(-90^\circ) + j\sin(-90^\circ) = 0 - 1j = -j \tag{89}$$

を掛けることになります．

$$\frac{1}{j} = \frac{1}{j} \cdot \frac{j}{j} = \frac{j}{-1} = -j \tag{90}$$

より，位相を 90° 遅らせることは，j で割るといってもよいでしょう．複素数の割り算は，位相を引くことであることを思い出してください．

[6] 複素数であることを表すのに $\dot{}$ を付けることがあります．複素数であることが明らかな場合は，$\dot{}$ を省略することもあります．

5.4 コンデンサとコイル—複素インピーダンス

コンデンサに掛かっている電圧と電流の関係は，式 (15) より，

$$v_C = V_m \sin(\omega t) \tag{91}$$

$$i_C = V_m \omega C \cos(\omega t) = V_m \omega C \sin(\omega t + \pi/2) \tag{92}$$

これを複素数のベクトル表示で表すと，

$$\dot{V}_C = V_m \angle 0 \tag{93}$$

$$\dot{I}_C = V_m \omega C \angle(\pi/2) \tag{94}$$

インピーダンスを複素数で表すと，

$$\dot{Z}_C = \frac{\dot{V}_C}{\dot{I}_C} = \frac{V_m \angle 0}{V_m \omega C \angle(\pi/2)} = \frac{1}{\omega C}\angle(-\pi/2) \tag{95}$$

$1\angle(-\pi/2) = 1/j$ なので，

$$\dot{Z}_C = \frac{1}{j\omega C} \tag{96}$$

となります．

コイルに掛かっている電圧と電流の関係は，式 (17) より，

$$v_L = V_m \sin(\omega t) \tag{97}$$

$$i_L = -\frac{V_m}{\omega L}\cos(\omega t) = \frac{V_m}{\omega L}\sin(\omega t - \pi/2) \tag{98}$$

これを複素数のベクトル表示で表すと，

$$\dot{V}_L = V_m \angle 0 \tag{99}$$

$$\dot{I}_L = \frac{V_m}{\omega L}\angle(-\pi/2) \tag{100}$$

インピーダンスを複素数で表すと，

$$\dot{Z}_L = \frac{\dot{V}_L}{\dot{I}_L} = \frac{V_m \angle 0}{\frac{V_m}{\omega L}\angle(-\pi/2)} = \omega L \angle(\pi/2) \tag{101}$$

$1\angle(\pi/2) = j$ なので，

$$\dot{Z}_L = j\omega L \tag{102}$$

となります．

5.5 もう一度ローパスフィルタ

コンデンサやコイルのインピーダンスを複素数で表すと，位相が回転する情報も含めて，オームの法則と同様に扱うことができます．図 16のローパスフィルタも，分圧回路と見なして計算できます．

$$\begin{aligned}\dot{V}_o &= \frac{Z_C}{R + Z_C}\dot{V}_i \\ &= \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}}\dot{V}_i \\ &= \frac{1}{1 + j\omega CR}\dot{V}_i \end{aligned} \tag{103}$$

伝達関数 $\dot{T}(j\omega)$ は，入力に対する出力で定義され，

$$\begin{aligned}\dot{T}(j\omega) &= \frac{\dot{V}_o}{\dot{V}_i} \\ &= \frac{1}{1+j\omega CR}\end{aligned} \tag{104}$$

となります．分母に虚数単位が入っていると不便なので，有理化しておきましょう．

$$\begin{aligned}\dot{T}(j\omega) &= \frac{1}{1+j\omega CR}\cdot\frac{1-j\omega CR}{1-j\omega CR} \\ &= \frac{1-j\omega CR}{1+(\omega CR)^2}\end{aligned} \tag{105}$$

ゲインは，この伝達関数の絶対値に，(入力に対する出力の) 位相は伝達関数の偏角になります．

具体的に計算してみましょう．

$$\begin{aligned}A &= |\dot{T}(j\omega)| \\ &= \left|\frac{1-j\omega CR}{1+(\omega CR)^2}\right|\end{aligned} \tag{106}$$

複素数の絶対値は，$|Z| = \sqrt{(\Re Z)^2+(\Im Z)^2}$ ですから，

$$A = \frac{\sqrt{1^2+(\omega CR)^2}}{1+(\omega CR)^2} = \frac{1}{\sqrt{1+(\omega CR)^2}} \tag{107}$$

となります．位相は，

$$\begin{aligned}\arg\dot{T}(j\omega) &= \tan^{-1}\frac{\Im\dot{T}(j\omega)}{\Re\dot{T}(j\omega)} \\ &= \tan^{-1}\frac{-\omega CR}{1} \\ &= \tan^{-1}(-\omega CR)\end{aligned} \tag{108}$$

となります．

R でグラフを描いてみます．

```
function ()
{
    R <- 15.9e3         # 抵抗値
    C <- 0.01e-6        # 容量

    f <- dec(10, 100e3, 30)         # 周波数
    w <- 2 * pi * f                 # 角周波数
    A <- 1/sqrt(1 + w * C * R)      # ゲイン
    phi <- atan(-w * C * R)         # 位相

    par(mfrow=c(2, 1))
    semilogplot(f, dB(A), type="l", col="red",
        xlab="Frequency (Hz)", ylab="Gain (dB)")
    semilogplot(f, phi*180/pi, type="l", col="red",
        xlab="Frequency (Hz)", ylab="Phase (deg)")
}
```

R の場合は，複素数をそのまま扱えますから，次のようにすることもできます．

```
function ()
{
    R <- 15.9e3         # 抵抗値
    C <- 0.01e-6        # 容量

    f <- dec(10, 100e3, 30)         # 周波数
    w <- 2 * pi * f                 # 角周波数
    j <- 0+1i                       # 虚数単位
    T <- 1/(1 + j * w * C * R)      # 複素数による伝達関数

    par(mfrow=c(2, 1))
    semilogplot(f, dB(T), type="l", col="red",
        xlab="Frequency (Hz)", ylab="Gain (dB)")
    semilogplot(f, Arg(T)*180/pi, type="l", col="red",
        xlab="Frequency (Hz)", ylab="Phase (deg)")      # Arg は偏角を得る関数
}
```

式 (104) を複素数のまま計算し，abs() を使えば複素数の絶対値が得られ，Arg() を使えば複素数の偏角が求められます．dB() の中には，abs() が入っていますので，そのまま dB(T) とすればゲインのデシベル値が求められます．R の虚数の表現は，a+bi ですが，結合がそれほど強くないので，式の中で使う時は (a+bi) のようにかっこで囲んだほうが良いでしょう．

5.6 もう一度微分補償

図 29の回路の伝達関数を求めます．伝達関数は，

$$\begin{aligned} T(j\omega) &= \frac{R_2}{R_1//Z_C + R_2} \\ &= \frac{R_2}{\frac{1}{\frac{1}{R_1}+j\omega C} + R_2} \\ &= \frac{R_2}{\frac{R_1}{1+j\omega C R_1} + R_2} \\ &= \frac{R_2(1+j\omega C R_1)}{R_1 + R_2(1+j\omega C R_1)} \\ &= \frac{R_2}{R_1+R_2} \cdot \frac{1+j\omega C R_1}{1+j\omega C\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}} \\ &= \frac{R_2}{R_1+R_2} \cdot \frac{1+j\omega C R_1}{1+j\omega C(R_1//R_2)} \end{aligned} \tag{109}$$

分母を有理化すると，

$$\begin{aligned} T(j\omega) &= \frac{R_2}{R_1+R_2} \cdot \frac{1+j\omega C R_1}{1+j\omega C(R_1//R_2)} \cdot \frac{1-j\omega C(R_1//R_2)}{1-j\omega C(R_1//R_2)} \\ &= \frac{R_2}{R_1+R_2} \cdot \frac{1+\omega^2C^2R_1(R_1//R_2)+j\omega C(R_1-R_1//R_2)}{1+\omega^2C^2(R_1//R_2)^2} \\ &= \frac{R_2}{R_1+R_2} \cdot \frac{1+\omega^2C^2R_1\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}+j\omega C(R_1-\frac{R_1R_2}{R_1+R_2})}{1+\omega^2C^2(\frac{R_1R_2}{R_1+R_2})^2} \\ &= R_2 \cdot \frac{R_1+R_2+\omega^2C^2R_1^2R_2+j\omega CR_1^2}{(R_1+R_2)^2+\omega^2C^2R_1^2R_2^2} \\ &= \frac{R_2(R_1+R_2)+\omega^2C^2R_1^2R_2^2+j\omega CR_1^2R_2}{(R_1+R_2)^2+\omega^2C^2R_1^2R_2^2} \end{aligned} \tag{110}$$

ゲインは,

$$
\begin{aligned}
|T(j\omega)| &= \frac{\sqrt{\{R_2(R_1+R_2)+\omega^2C^2R_1^2R_2^2\}^2+\omega^2C^2R_1^4R_2^2}}{(R_1+R_2)^2+\omega^2C^2R_1^2R_2^2} \\
&= \frac{\sqrt{\omega^4C^4R_1^4R_2^4+\omega^2C^2R_1^2R_2^2(R_1^2+2R_1R_2+2R_2^2)+R_2^2(R_1+R_2)^2}}{\omega^2C^2R_1^2R_2^2+(R_1+R_2)^2} \\
&= \frac{\sqrt{(\omega^2C^2R_1^2R_2^2+R_2^2)\{\omega^2C^2R_1^2R_2^2+(R_1+R_2)^2\}}}{\omega^2C^2R_1^2R_2^2+(R_1+R_2)^2} \\
&= \frac{\sqrt{\omega^2C^2R_1^2R_2^2+R_2^2}}{\sqrt{\omega^2C^2R_1^2R_2^2+(R_1+R_2)^2}} \\
&= \frac{R_2}{R_1+R_2}\cdot\frac{\sqrt{\omega^2C^2R_1^2+1}}{\sqrt{\omega^2C^2(R_1//R_2)^2+1}}
\end{aligned}
\tag{111}
$$

となり，式 (57) と一致しました．位相は,

$$
\begin{aligned}
\arg T(j\omega) &= \tan^{-1}\frac{\omega CR_1^2R_2}{R_2(R_1+R_2)+\omega^2C^2R_1^2R_2^2} \\
&= \tan^{-1}\frac{\omega CR_1^2}{R_1+R_2+\omega^2C^2R_1^2R_2}
\end{aligned}
\tag{112}
$$

となります.

R で周波数特性を描いてみると,

```
function ()
{
    R1 <- 1e3
    R2 <- 100
    C <- 1000e-12

    f <- dec(1e3, 10e6, 30)
    w <- 2 * pi * f
    A <- R2 / (R1 + R2) *
        sqrt(w^2*C^2*R1^2 + 1) / sqrt(w^2*C^2*(R1 %p% R2)^2 + 1)
    phi <- atan((w*C*R1^2)/(R1 + R2 + w^2*C^2*R1^2*R2))

    par(mfrow=c(2, 1))
    semilogplot(f, dB(A), type="l", col="red",
        xlab="Frequency (Hz)", ylab="Gain (dB)")
    semilogplot(f, phi*180/pi, type="l", col="red",
        xlab="Frequency (Hz)", ylab="Phase (deg)")
}
```

%p% は抵抗，コイルの並列合成値を求める演算子です (コンデンサの場合は直列合成値になる)．このように，R では演算子も自分で定義することができます．便利でしょう?

このプログラムのように，複素数を使わずに計算しようとすると，人間が有理化してやらねばならず，計算が大変です．複素数のまま計算すると，次のようになります.

```
function ()
{
```

```
    R1 <- 1e3
    R2 <- 100
    C <- 1000e-12

    j <- 0+1i
    f <- dec(1e3, 10e6, 30)
    w <- 2 * pi * f
    T <- R2 / (R1 + R2) * (1 + j*w*C*R1) / (1 + j*w*C*(R1 %p% R2))

    par(mfrow=c(2, 1))
    semilogplot(f, dB(T), type="l", col="red",
        xlab="Frequency (Hz)", ylab="Gain (dB)")
    semilogplot(f, Arg(T)*180/pi, type="l", col="red",
        xlab="Frequency (Hz)", ylab="Phase (deg)")
}
```

さらに，伝達関数を明に求めなくても計算できます．

```
function ()
{
    R1 <- 1e3
    R2 <- 100
    C <- 1000e-12

    j <- 0+1i
    f <- dec(1e3, 10e6, 30)
    w <- 2 * pi * f
    ZC <- 1/(j * w * C)     # C の複素インピーダンス
    Z1 <- R1 %p% ZC         # R1 と C を並列にした複素インピーダンス
    T <- R2 / (Z1 + R2)     # 分圧

    par(mfrow=c(2, 1))
    semilogplot(f, dB(T), type="l", col="red",
        xlab="Frequency (Hz)", ylab="Gain (dB)")
    semilogplot(f, Arg(T)*180/pi, type="l", col="red",
        xlab="Frequency (Hz)", ylab="Phase (deg)")
}
```

こうすれば，人間が行う計算はほとんどなくなりますが，どこにポールやゼロがあるかわかりませんので，できれば伝達関数を求めておくのがよいでしょう．

5.7 オイラーの公式

複素数には，指数関数表示というもう一つの表現方法があります．指数関数表示を使うと，複素数の積がもっと簡単に計算できます．

無限回微分可能な関数 $f(x)$ は，次の形のべき級数で表せます．

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \tag{113}$$

$$= f(a) + f^{(1)}(a)(x-a) + \frac{f^{(2)}(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f^{(3)}(a)}{3!}(x-a)^3 + \frac{f^{(4)}(a)}{4!}(x-a)^4 + \cdots \tag{114}$$

これを**テイラー展開**といいます．ここで，$f^{(n)}(x)$ は，$f(x)$ を n 回微分したものです．

特に，$a = 0$ のとき，

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \tag{115}$$

$$= f(0) + f^{(1)}(0)x + \frac{f^{(2)}(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4 + \cdots \tag{116}$$

となり，**マクローリン展開**といいます．

指数関数 e^x は，何回微分しても e^x であり，$e^0 = 1$ ですから，

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^7}{7!} + \cdots \tag{117}$$

となります．この式の x のかわりに jx を代入すると，

$$e^{jx} = 1 + jx + \frac{j^2x^2}{2!} + \frac{j^3x^3}{3!} + \frac{j^4x^4}{4!} + \frac{j^5x^5}{5!} + \frac{j^6x^6}{6!} + \frac{j^7x^7}{7!} + \cdots$$

$$= 1 + jx - \frac{x^2}{2!} - \frac{jx^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{jx^5}{5!} - \frac{x^6}{6!} - \frac{jx^7}{7!} + \cdots \tag{118}$$

となります．

sine 関数を微分すると，次のようになります．

$$\frac{d \sin x}{dx} = \cos x \tag{119}$$

$$\frac{d \cos x}{dx} = -\sin x \tag{120}$$

$$\frac{d(-\sin x)}{dx} = -\cos x \tag{121}$$

$$\frac{d(-\cos x)}{dx} = \sin x \tag{122}$$

4 回微分すると元に戻ります．

これから，$\sin x$ をマクローリン展開すると，

$$\sin x = \sin 0 + x\cos 0 - \frac{x^2}{2!}\sin 0 - \frac{x^3}{3!}\cos 0 + \frac{x^4}{4!}\sin 0 + \cdots$$

$$= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots \tag{123}$$

となり，$\cos x$ をマクローリン展開すると，

$$\cos x = \cos 0 - x\sin 0 - \frac{x^2}{2!}\cos 0 + \frac{x^3}{3!}\sin 0 + \frac{x^4}{4!}\cos 0 + \cdots$$

$$= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots \tag{124}$$

となります．

これら 2 つの式から，

$$\cos x + j\sin x = \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots\right) + \left(jx - \frac{jx^3}{3!} + \frac{jx^5}{5!} - \frac{jx^7}{7!} + \cdots\right)$$

$$= 1 + jx - \frac{x^2}{2!} - \frac{jx^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{jx^5}{5!} - \frac{x^6}{6!} - \frac{jx^7}{7!} + \cdots \tag{125}$$

となって，式 (118) と一致します．すなわち，

$$\cos x + j\sin x = e^{jx} \tag{126}$$

であり，これは**オイラーの公式**とよばれるものです．sine 関数は 4 回微分すると元に戻り，j は 4 乗すると元に戻るという性質を考えると，複素数と三角関数は密接な関係にあることが理解できます．

この式の x に θ を代入し，両辺を r 倍してやると，

$$r\cos\theta + jr\sin\theta = re^{j\theta} \tag{127}$$

となり，これは図 32の複素数を表しているといえます．つまり，

$$Z = r\angle\theta = re^{j\theta} = r\cos\theta + jr\sin\theta \tag{128}$$

で，これらは同じ複素数を別の形で表したものです．

この指数形式を使うと，複素数の乗算がとても簡単にできます．

$$r_1e^{j\theta_1}\cdot r_2e^{j\theta_2} = r_1r_2e^{j\theta_1}e^{j\theta_2} = r_1r_2e^{j(\theta_1+\theta_2)} \tag{129}$$

正弦波の瞬時値は，

$$v(t) = \Im\{V_me^{j(\omega t+\phi)}\} \tag{130}$$

で表せます．

6　伝達関数—1 次の場合

これまで，伝達関数には，変数として $j\omega$ を使ってきましたが，これからは，これを s で表します．今回は扱いませんが，この s はラプラス変数で，ラプラス変換を使えば過渡応答を求めることもできます．正弦波に対する定常的な応答を求めるには，s に $j\omega$ を代入してやります．

この記号を使うと，コンデンサのインピーダンス Z_C は，

$$Z_C = \frac{1}{sC} \tag{131}$$

と表せ，コイルのインピーダンス Z_L は，

$$Z_L = sL \tag{132}$$

と表せます．

これから基本となる 4 つの 1 次の伝達関数を見ていきます．

6.1　ローパス特性

次の 2 つの回路は，1 次のローパス特性になります．

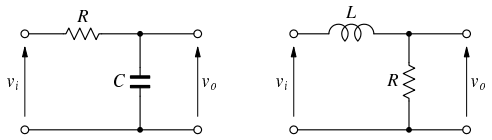

図 35: ローパス特性の回路

左側の CR によるローパスフィルタの伝達関数は，

$$T(s) = \frac{Z_C}{R + Z_C} = \frac{\frac{1}{sC}}{R + \frac{1}{sC}} = \frac{1}{sCR + 1} \tag{133}$$

$CR = T_C$ とおくと，

$$T(s) = \frac{1}{sT_C + 1} \tag{134}$$

となります．この T_C は**時定数** (time constant) と呼ばれます．

右側の LR によるローパスフィルタの伝達関数は，

$$T(s) = \frac{R}{Z_L + R} = \frac{R}{sL + R} = \frac{1}{sL/R + 1} \tag{135}$$

$L/R = T_L$ とおくと，

$$T(s) = \frac{1}{sT_L + 1} \tag{136}$$

となり，CR の場合と同じ形になりました．

一般に，1 次のローパス特性の伝達関数は，

$$T(s) = \frac{1}{sT + 1} \tag{137}$$

となり，$p = -1/T$ とおけば，

$$T(s) = \frac{1}{1 - s/p} \tag{138}$$

となります．この p は伝達関数の**極 (ポール)** (pole) といいます．$s = p$ のとき，T が無限大になるからです．現実には，p は複素数ではありませんので，この伝達関数 T が無限大になることはありません．

一般に，伝達関数の分母 $D(s)$ が 0 となる解をポールといいいます．伝達関数の分母の多項式は，ポール $p_1, p_2, \ldots$ によって，次のように変形できます．

$$D(s) = 1 + a_1 s + a_2 s^2 + a_3 s^3 + \cdots \tag{139}$$

$$= (1 - s/p_1)(1 - s/p_2)(1 - s/p_3)\cdots \tag{140}$$

この伝達関数の，ゲインと位相の周波数特性を調べてみましょう．そのために，$\omega_0 = -p$ とおき，$s = j\omega$ を代入し，有理化します．

$$T(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega/\omega_0} = \frac{1}{1 + j\omega/\omega_0} \cdot \frac{1 - j\omega/\omega_0}{1 - j\omega/\omega_0}$$

$$= \frac{1 - j\omega/\omega_0}{1 + (\omega/\omega_0)^2} \tag{141}$$

ゲインは，

$$|T(j\omega)| = \frac{\sqrt{1^2 + (\omega/\omega_0)^2}}{1 + (\omega/\omega_0)^2} = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega/\omega_0)^2}} \tag{142}$$

となります．$\omega \ll \omega_0$ のとき，$\omega/\omega_0 \ll 1$ となり，分母はほぼ 1 ですので，$|T| \approx 1$ となります．$\omega = \omega_0$ のとき，分母は $\sqrt{2}$ となるので，$|T| = 1/\sqrt{2}$ となります．これをデシベルで表すと約 −3 dB で，$f_c = \omega_0/2\pi$ は**カットオフ周波数**と呼ばれます．$\omega \gg \omega_0$ のとき，$\omega/\omega_0 \gg 1$ となり，分母の根号の中の 1 を無視することができるので，$|T| \approx 1/(\omega/\omega_0) = \omega_0/\omega$ となります．したがって，周波数が 10 倍となるごとにゲインは 1/10 になり，−20 dB/dec または −6 dB/oct でゲインが直線的に下がります．

位相は，

$$\arg T(j\omega) = \tan^{-1} \frac{-\omega/\omega_0}{1} = \tan^{-1}\left(-\frac{\omega}{\omega_0}\right) \tag{143}$$

となり，$\omega \to 0$ で 0°，$\omega = \omega_0$ で −45°，$\omega \to \infty$ で −90° となります．

グラフで表すと，図 36のようになります．

6.2 ハイパス特性

次の 2 つの回路は，1 次のハイパス特性になります．

左側の CR によるハイパスフィルタの伝達関数は，

$$T(s) = \frac{R}{Z_C + R} = \frac{R}{\frac{1}{sC} + R} = \frac{1}{\frac{1}{sCR} + 1} \tag{144}$$

$CR = T_C$ とおくと，

$$T(s) = \frac{1}{\frac{1}{sT_C} + 1} \tag{145}$$

となります．

右側の LR によるハイパスフィルタの伝達関数は，

$$T(s) = \frac{Z_L}{R + Z_L} = \frac{sL}{R + sL} = \frac{1}{\frac{1}{sL/R} + 1} \tag{146}$$

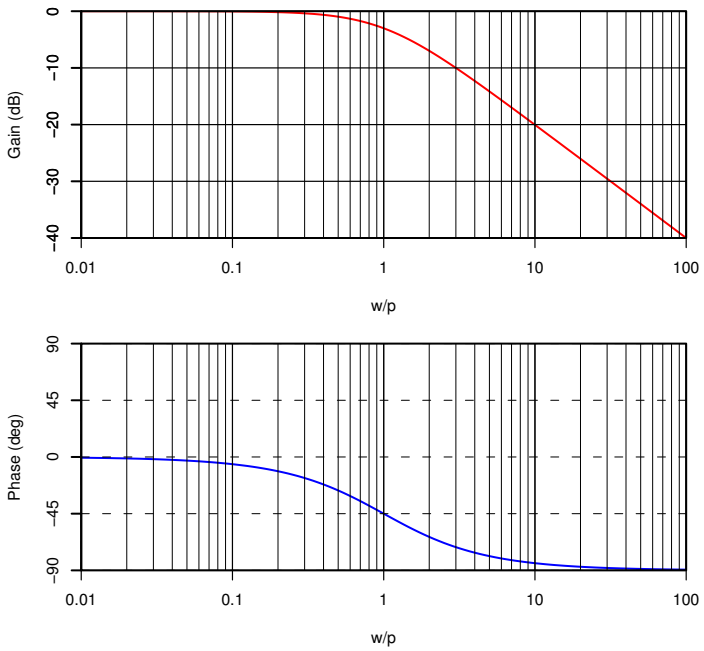

図 36: ローパス特性

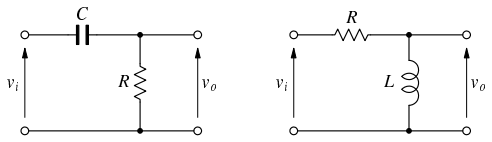

図 37: ハイパス特性の回路

$L/R = T_L$ とおくと，

$$T(s) = \frac{1}{\frac{1}{sT_L} + 1} \tag{147}$$

となり，CR の場合と同じ形になりました．

一般に，1 次のハイパス特性の伝達関数は，

$$T(s) = \frac{1}{\frac{1}{sT} + 1} \tag{148}$$

となり，$p = -1/T$ とおけば，

$$T(s) = \frac{1}{1 - p/s} \tag{149}$$

となります．

この伝達関数，のゲインと位相の周波数特性を調べてみましょう．そのために，$\omega_0 = -p$ とおき，$s = j\omega$ を代入し，有理化します．

$$\begin{aligned} T(j\omega) &= \frac{1}{1 + \omega_0/j\omega} = \frac{1}{1 + \omega_0/j\omega} \cdot \frac{1 - \omega_0/j\omega}{1 - \omega_0/j\omega} \\ &= \frac{1 - \omega_0/j\omega}{1 + (\omega_0/\omega)^2} = \frac{1 + j\omega_0/\omega}{1 + (\omega_0/\omega)^2} \end{aligned} \tag{150}$$

ゲインは，

$$|T(j\omega)| = \frac{\sqrt{1^2 + (\omega_0/\omega)^2}}{1 + (\omega_0/\omega)^2} = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega_0/\omega)^2}} \tag{151}$$

となります．$\omega \gg \omega_0$ のとき，$\omega_0/\omega \ll 1$ となり，分母はほぼ 1 ですので，$|T| \approx 1$ となります．$\omega = \omega_0$ のとき，分母は $\sqrt{2}$ となるので，$|T| = 1/\sqrt{2}$ となります．これをデシベルで表すと約 -3 dB です．$\omega \ll \omega_0$ のとき，$\omega_0/\omega \gg 1$ となり，分母の根号の中の 1 を無視することができるので，$|T| \approx 1/(\omega_0/\omega) = \omega/\omega_0$ となります．したがって，周波数が 1/10 となるごとにゲインは 1/10 になり，-20 dB/dec または -6 dB/oct でゲインが直線的に下がります．

位相は，

$$\arg T(j\omega) = \tan^{-1}\frac{\omega_0/\omega}{1} = \tan^{-1}\left(\frac{\omega_0}{\omega}\right) \tag{152}$$

となり，$\omega \to 0$ で 90°，$\omega = \omega_0$ で 45°，$\omega \to \infty$ で 0° となります．

グラフで表すと，図 38のようになります．

6.3 ハイブースト特性

現実の回路では，無限にゲインが上昇する回路はあり得ないのですが，解析に便利なため，ある周波数からゲインが上昇していく伝達関数を考えます．

$$T(s) = 1 - \frac{s}{z} \tag{153}$$

z は，この伝達関数の**ゼロ** (zero) で，$s = z$ のとき，伝達関数が 0 になります．実際には，z は複素数ではないので，この伝達関数の値が 0 になることはありません．$\omega_0 = -z$ とおき，s に $j\omega$ を代入すると，

$$T(j\omega) = 1 + \frac{j\omega}{\omega_0} \tag{154}$$

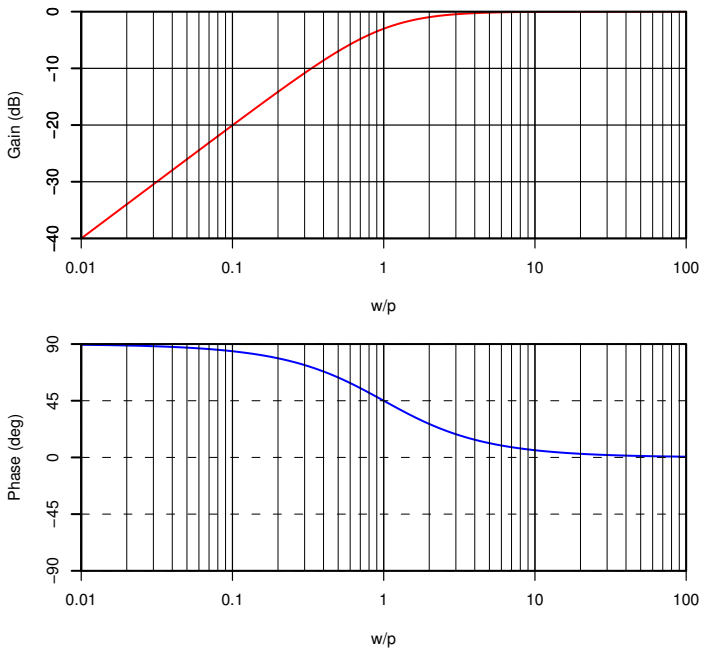

図 38: ハイパス特性

となります.

一般に，伝達関数の分子 $N(s)$ が 0 となる解をゼロといいいます．伝達関数の分母の多項式は，ゼロ $z_1, z_2, \ldots$ によって，次のように変形できます.

$$N(s) = 1 + a_1 s + a_2 s^2 + a_3 s^3 + \cdots \tag{155}$$

$$= (1 - s/z_1)(1 - s/z_2)(1 - s/z_3)\cdots \tag{156}$$

これより，ゲインは,

$$|T(j\omega)| = \sqrt{1 + (\omega/\omega_0)^2} \tag{157}$$

となります．したがって，$\omega \ll \omega_0$ のとき，$\omega/\omega_0 \ll 1$ ですから，ゲインは $|T| \approx 1$ となります．$\omega = \omega_0$ のとき，$|T| = \sqrt{2}$ となり，これは約 +3 dB です．$\omega \gg \omega_0$ のとき，$\omega/\omega_0 \gg 1$ ですから，根号の中の 1 を無視できて，ゲインは $|T| \approx \omega/\omega_0$ となり，周波数が 10 倍になればゲインも 10 倍になります.

位相は,

$$\arg T(j\omega) = \tan^{-1} \frac{\omega/\omega_0}{1} = \tan^{-1} \frac{\omega}{\omega_0} \tag{158}$$

で，$\omega \to 0$ のとき 0°，$\omega = \omega_0$ のとき 45°，$\omega \to \infty$ のとき 90° となります.

グラフで表すと，図 39のようになります.

6.4 ローブースト特性

ある周波数以下でゲインが上昇していく伝達関数を考えます.

$$T(s) = 1 - \frac{z}{s} \tag{159}$$

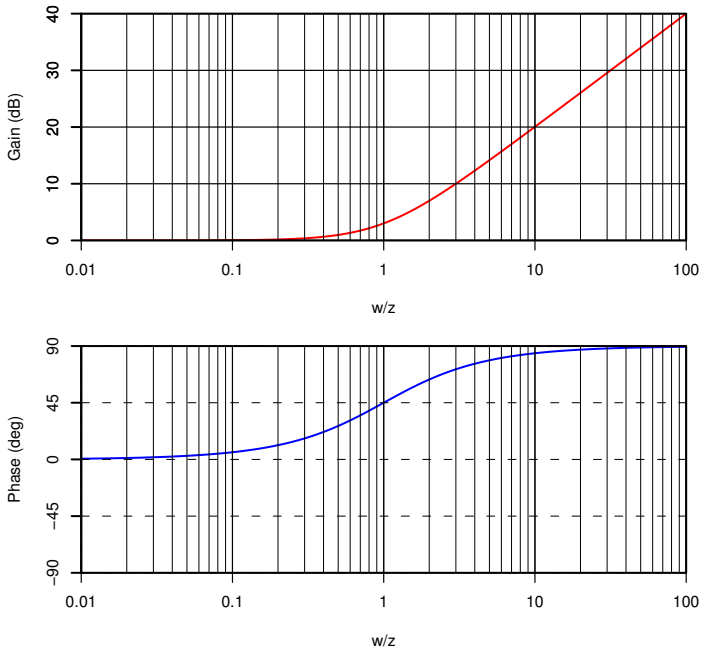

図 39: ハイブースト特性

$\omega_0 = -z$ とおき，s に $j\omega$ を代入すると，

$$T(j\omega) = 1 + \frac{\omega_0}{j\omega} = 1 - j\frac{\omega_0}{\omega} \tag{160}$$

となります．

これより，ゲインは，

$$|T(j\omega)| = \sqrt{1 + (\omega_0/\omega)^2} \tag{161}$$

となります．したがって，$\omega \gg \omega_0$ のとき，$\omega_0/\omega \ll 1$ ですから，ゲインは $|T| \approx 1$ となります．$\omega = \omega_0$ のとき，$|T| = \sqrt{2}$ となり，これは約 +3 dB です．$\omega \ll \omega_0$ のとき，$\omega_0/\omega \gg 1$ ですから，根号の中の 1 を無視できて，ゲインは $|T| \approx \omega_0/\omega$ となり，周波数が 1/10 倍になればゲインは 10 倍になります．

位相は，

$$\arg T(j\omega) = \tan^{-1}\frac{-\omega_0/\omega}{1} = \tan^{-1}\left(-\frac{\omega_0}{\omega}\right) \tag{162}$$

で，$\omega \to 0$ のとき $-90°$，$\omega = \omega_0$ のとき $-45°$，$\omega \to \infty$ のとき $0°$ となります．

グラフで表すと，図 40のようになります．

6.5 微分補償 3 回目

伝達関数は，式 (109) より，

$$T(s) = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot \frac{1 + sCR_1}{1 + sC(R_1 // R_2)} \tag{163}$$

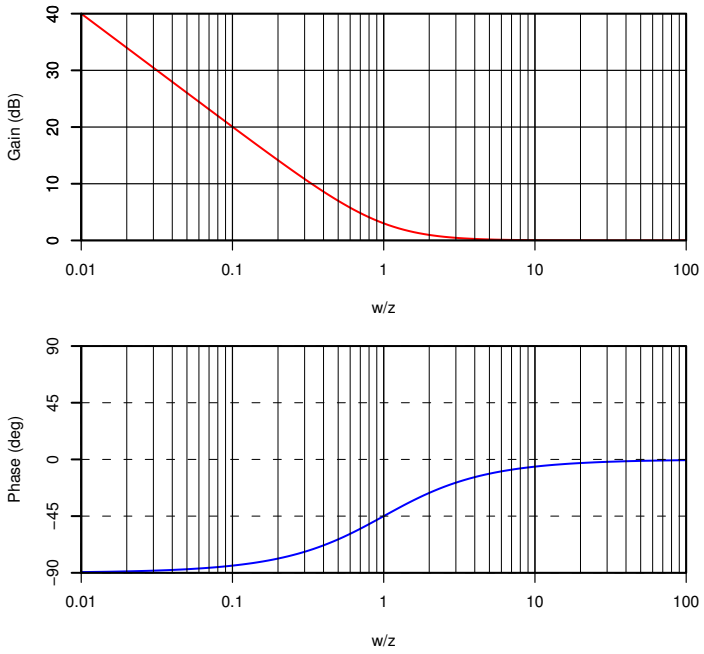

図 40: ローブースト特性

で，

$$z = -\frac{1}{CR_1} \tag{164}$$

$$p = -\frac{1}{C(R_1//R_2)} \tag{165}$$

とおけば，

$$T(s) = \frac{R_2}{R_1+R_2}\cdot\frac{1-s/z}{1-s/p} = \frac{R_2}{R_1+R_2}\cdot(1-s/z)\cdot\frac{1}{1-s/p} \tag{166}$$

と書けます．この式の第 1 項は，周波数に依存しません．第 2 項はハイブースト特性で，$|z|$ より周波数が高くなるとゲインが上昇します．第 3 項はハイカット (ローパス) 特性で，$|p|$ より周波数が高くなるとゲインが下降します．伝達関数の積は，ゲインに関してはそれぞれの積に，位相に関しては和になります．ゲインをデシベルで表した場合は，ゲインも和になります．この場合，$R_1 > (R_1//R_2)$ なので，$|z| < |p|$ となります．したがってゲインの周波数特性は，低域では $R_2/(R_1+R_2)$ で，$|z|$ からゲインが 6 dB/oct で上昇し，$|p|$ で平坦に戻ります．このようすを漸近線で示したものが，図 41です．

ゼロ，ポールの値は，

$$z = -\frac{1}{CR_1} = -\frac{1}{1000\times10^{-12}\cdot1\times10^{3}} = -1\times10^{6}\,[\mathrm{rad/s}] = -159\,[\mathrm{kHz}] \tag{167}$$

$$p = -\frac{1}{C(R_1//R_2)} = -\frac{1}{1000\times10^{-12}\cdot(1\times10^{3}//100)} = -11\times10^{6}\,[\mathrm{rad/s}] = -1.75\,[\mathrm{MHz}] \tag{168}$$

です．

位相は，

$$\phi = \tan^{-1}\frac{\omega}{|z|} - \tan^{-1}\frac{\omega}{|p|} \tag{169}$$

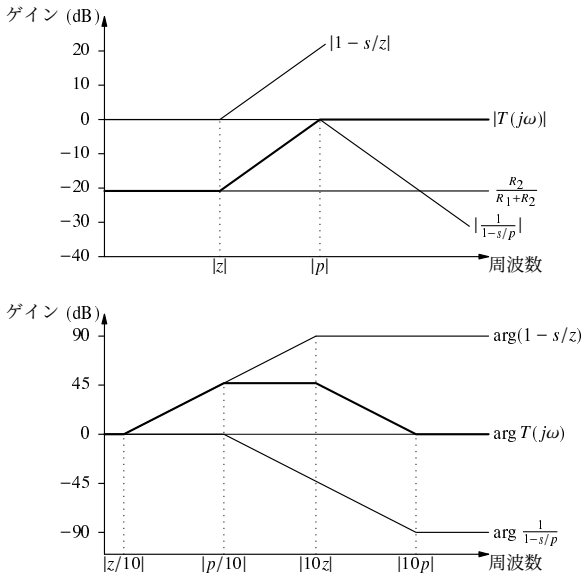

図 41: 微分型位相補償の特性 (漸近線による)

となります．位相がもっとも進むのは，証明は省略しますが $\omega = \sqrt{|z| \cdot |p|}$ の時で，このときの角周波数を ω_m とすると，

$$\omega_m = \sqrt{1 \times 10^6 \cdot 11 \times 10^6} = 3.3 \times 10^6 \,[\mathrm{rad/s}] = 525 \,[\mathrm{kHz}] \tag{170}$$

なので，

$$\phi_m = \tan^{-1} 3.3 - \tan^{-1} \frac{3.3}{11} = 56.4 \,[^\circ] \tag{171}$$

となります．特性を図 42に示します．

6.6 CR 型 RIAA イコライザ

RIAA イコライザの特性は，図 43のようになっており，時定数は，

$$\begin{aligned} T_1 &= 3180 \,[\mu\mathrm{s}] \\ T_2 &= 318 \,[\mu\mathrm{s}] \\ T_3 &= 75 \,[\mu\mathrm{s}] \end{aligned}$$

と定められています．この特性を実現する伝達関数は，

$$T(s) = A_0 \frac{1 - s/z_2}{(1 - s/p_1)(1 - s/p_3)} \tag{172}$$

のようになります．ここで，

$$\begin{aligned} p_1 &= -\frac{1}{T_1} = -314.5 \,[\mathrm{rad/s}] = -50 \,[\mathrm{Hz}] \\ z_2 &= -\frac{1}{T_2} = -3145 \,[\mathrm{rad/s}] = -500 \,[\mathrm{Hz}] \\ p_3 &= -\frac{1}{T_3} = -13333 \,[\mathrm{rad/s}] = -2120 \,[\mathrm{Hz}] \end{aligned}$$

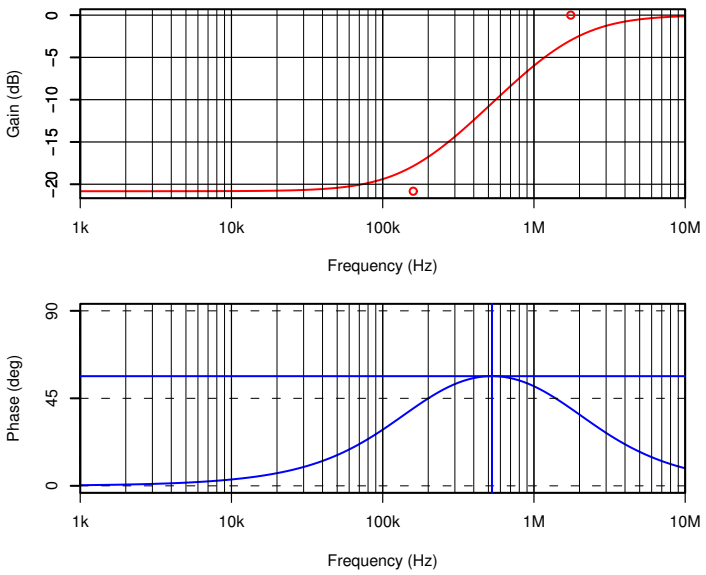

図 42: 微分型位相補償の特性

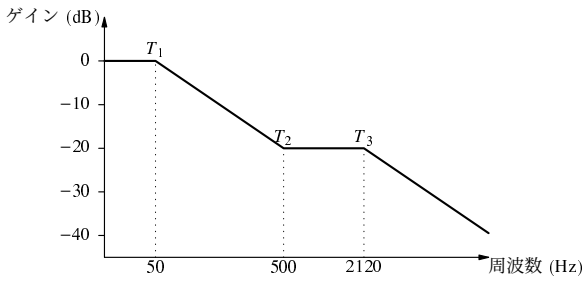

図 43: RIAA イコライジング特性

です.

この特性を実現するには，たとえば図 44のような回路を使います.

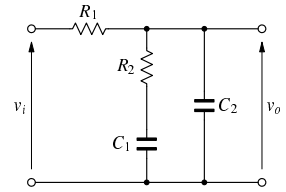

図 44: CR 型 RIAA イコライザ

この回路の伝達関数を求めます．R_2, C_1, C_2 の部分のインピーダンスを Z とおくと，

$$\begin{aligned} Z &= (R_2 + Z_{C_1})//Z_{C_2} \\ &= \frac{1}{\frac{1}{R_2+\frac{1}{sC_1}} + sC_2} \\ &= \frac{1}{\frac{sC_1}{sC_1R_2+1} + sC_2} \\ &= \frac{sC_1R_2 + 1}{sC_1 + sC_2(sC_1R_2 + 1)} \\ &= \frac{sC_1R_2 + 1}{s^2C_1C_2R_2 + s(C_1 + C_2)} \end{aligned}$$

これを使うと，この回路の伝達関数は，

$$\begin{aligned} T(s) &= \frac{Z}{R_1 + Z} \\ &= \frac{\frac{sC_1R_2+1}{s^2C_1C_2R_2+s(C_1+C_2)}}{R_1 + \frac{sC_1R_2+1}{s^2C_1C_2R_2+s(C_1+C_2)}} \\ &= \frac{sC_1R_2 + 1}{s^2C_1C_2R_1R_2 + s(C_1R_1 + C_1R_2 + C_2R_1) + 1} \end{aligned} \tag{173}$$

となります．一方，式 (172) より，

$$\frac{1 - s/z_2}{(1 - s/p_1)(1 - s/p_3)} = \frac{1 - s/z_2}{1 - s(1/p_1 + 1/p_3) + s^2/(p_1p_3)} = \frac{1 + sT_2}{1 + s(T_1 + T_3) + s^2T_1T_3} \tag{174}$$

ですから，s の各係数を比較することにより，

$$C_1R_2 = T_2 \tag{175}$$

$$C_1C_2R_1R_2 = T_1T_3 \tag{176}$$

$$C_1R_1 + C_1R_2 + C_2R_1 = T_1 + T_3 \tag{177}$$

という関係が成り立つことがわかります．式 (175) を式 (176) に代入することにより，

$$\begin{aligned} C_2R_1T_2 &= T_1T_3 \\ C_2R_1 &= \frac{T_1T_3}{T_2} \end{aligned} \tag{178}$$

これらを式 (177) に代入することにより,

$$\begin{aligned} C_1R_1 + T_2 + \frac{T_1T_3}{T_2} &= T_1 + T_3 \\ C_1R_1 &= T_1 + T_3 - T_2 - \frac{T_1T_3}{T_2} \end{aligned} \tag{179}$$

となります.

まとめると,

$$C_1R_2 = T_2 = 318\,[\mu\mathrm{s}] \tag{180}$$

$$C_2R_1 = \frac{T_1T_3}{T_2} = 750\,[\mu\mathrm{s}] \tag{181}$$

$$C_1R_1 = T_1 + T_3 - T_2 - \frac{T_1T_3}{T_2} = 2187\,[\mu\mathrm{s}] \tag{182}$$

を満たす定数をもとめればよいことになります. C_1 として E6 系列の $0.047\,\mu$F を選ぶと,

$$\begin{aligned} R_2 &= \frac{318\times10^{-6}}{0.047\times10^{-6}} \approx 6.8\,[\mathrm{k\Omega}] \\ R_1 &= \frac{2187\times10^{-6}}{0.047\times10^{-6}} \approx 47\,[\mathrm{k\Omega}] \\ C_2 &= \frac{750\times10^{-6}}{47\times10^{3}} \approx 0.016\,[\mu\mathrm{F}] \end{aligned}$$

となります. C_2 としては, $0.015\,\mu$F と $0.001\,\mu$F を並列にすればよいでしょう.

この回路の特性と RIAA 偏差を調べましょう.

```
function ()
{
    f <- dec(10, 100e3, 30)     # 周波数
    s <- (0+1i) * 2 * pi * f

    # 正しい RIAA 特性
    T1 <- 3180e-6
    T2 <- 318e-6
    T3 <- 75e-6
    TT <- (1+s*T2)/((1+s*T1)*(1+s*T3))

    # 容易に入手可能な定数による RIAA 特性
    R1 <- 47e3
    R2 <- 6.8e3
    C1 <- 0.047e-6
    C2 <- 0.016e-6
    T <- (1+s*C1*R2)/(1 + s*(C1*R1+C1*R2+C2*R1) + s^2*C1*C2*R1*R2)

    # 次段の入力インピーダンスが 1Mohm の場合の特性
    Z <- (R2 + 1/(s*C1)) %p% (1/(s*C2)) %p% 1e6
    Tp <- Z / (R1 + Z)

    par(mfrow=c(2, 1))
    semilogplot(f, dB(cbind(T, Tp)), type="l", lty=1, col=c("red", "blue"),
        xlim=c(20, 20e3), ylim=c(-40, 0), yaxs="i",
        xlab="Frequency (Hz)", ylab="Gain (dB)")

    d <- T / TT                 # RIAA 偏差
    d <- d / d[near(f, 1e3)]    # 偏差の基準を 1kHz にする
```

```
    dp <- Tp / TT                # RIAA 偏差 (次段の Zin=1Mohm)
    dp <- dp / dp[near(f, 1e3)]
    semilogplot(f, dB(cbind(d, dp)), type="l", lty=1, col=c("red", "blue"),
        xlim=c(20, 20e3), ylim=c(-1, 1), yaxs="i",
        xlab="Frequency (Hz)", ylab="RIAA error (dB)")
}
```

関数 `near(x, v)` は，値 `v` にもっとも近い配列 `x` の要素の番号 (添字) を返します．したがって，`d[near(f, 1e3)]` は，1 kHz にもっとも近い周波数の RIAA 偏差の値になります．この値ですべての RIAA 偏差を割っていますから，1 kHz の偏差が 1 (0 dB) になります．

赤い線は次段の入力インピーダンスが無限大の場合で，青い線は次段の入力インピーダンスが 1 MΩ の場合です．このように，次段の入力インピーダンスが低くなると，低域の RIAA 偏差がマイナス方向に大きくなります．この偏差を小さくするには，最初から次段の入力インピーダンスを含めて伝達関数を求めます．

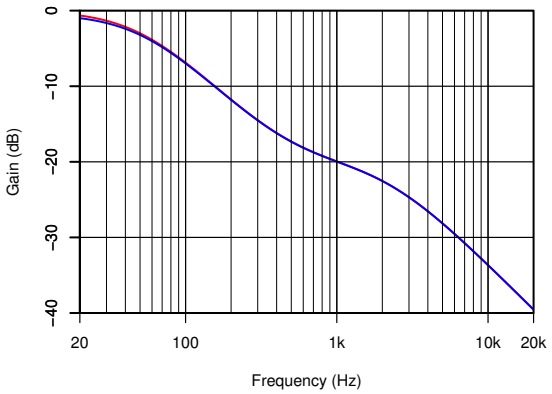

図 45: RIAA 特性

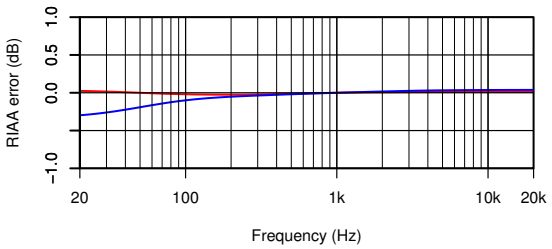

図 46: RIAA 偏差

図 47 (a) では，次段の入力インピーダンスとして R_3 を含めました．この R_3 を (b) のように R_1 の直後に移します．点線から左側を見たインピーダンスは $R_1//R_3$ であり，この点線で切り離した時の開放電圧は $v_i R_3/(R_1+R_3)$ ですから，テブナンの定理により，(c) のように書き直せます．したがって，$R_1//R_3$ が 47 kΩ になるようにすれば，RIAA 特性が得られます．

たとえば，$R_3 = 470\,\mathrm{k\Omega}$ とすると，R_1 の値は，

$$R_1 = \frac{1}{\frac{1}{47} - \frac{1}{470}} = 52.2\,[\mathrm{k\Omega}] \tag{183}$$

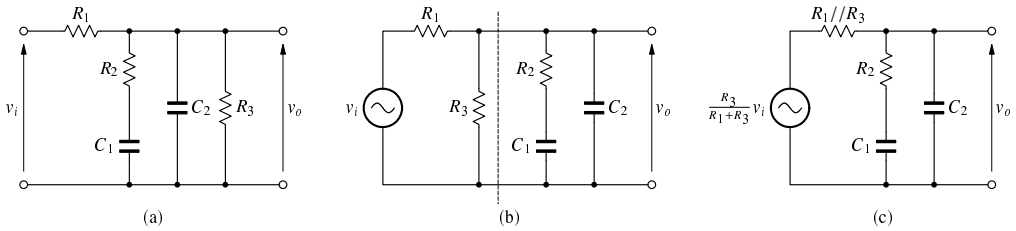

図 47: CR 型 RIAA イコライザに次段の入力インピーダンスを付加

ですから，51 kΩ を使えばよいでしょう．

演習 4

$R_1 = 51\,\mathrm{k\Omega}$, $R_3 = 470\,\mathrm{k\Omega}$ とした場合の RIAA 特性と，偏差をグラフに描きましょう．

7　伝達関数—2 次の場合

図 48のような，抵抗とコイルとコンデンサを組み合わせた回路を考えます.

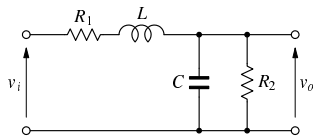

図 48: コイルとコンデンサによる 2 次ローパスフィルタ

この回路の伝達関数を求めます．C と R_2 の並列の部分のインピーダンスを Z とすると，

$$\begin{aligned} Z &= \frac{1}{sC + \frac{1}{R_2}} \\ &= \frac{R_2}{sCR_2 + 1} \end{aligned} \tag{184}$$

ですから，伝達関数 $T(s)$ は，

$$\begin{aligned} T(s) &= \frac{Z}{R_1 + sL + Z} \\ &= \frac{\frac{R_2}{sCR_2+1}}{R_1 + sL + \frac{R_2}{sCR_2+1}} \\ &= \frac{R_2}{sCR_1R_2 + R_1 + s^2CLR_2 + sL + R_2} \\ &= \frac{R_2}{R_1 + R_2 + s(CR_1R_2 + L) + s^2CLR_2} \\ &= \frac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot \frac{1}{1 + s\{C(R_1//R_2) + L/(R_1 + R_2)\} + s^2CL\frac{R_2}{R_1+R_2}} \end{aligned} \tag{185}$$

となります.

この伝達関数の振る舞いを知るため，次の形の伝達関数を調べます.

$$T(s) = \frac{1}{1 + bs + as^2} \tag{186}$$

7.1　判別式が正の場合

分母の 2 次式の判別式,

$$D = b^2 - 4a \tag{187}$$

が正であれば，$1 + bs + as^2 = 0$ の実解 p_1, p_2 によって分母を因数分解できます.

$$T(s) = \frac{1}{(1 - s/p_1)(1 - s/p_2)} \tag{188}$$

$a > 0, b > 0$ の場合，解と係数の関係より必ず $p_1, p_2 < 0$ となり，1 次のローパス特性が 2 段接続されたものと解釈できます．ただし，2 つのローパスフィルタ間の干渉はありません.

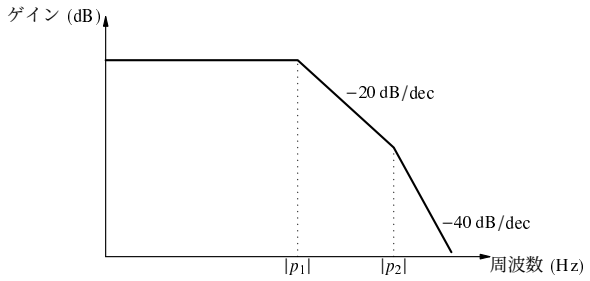

図 49: 判別式が正の場合

数値例　$R_1 = 500\,\Omega$, $L = 5\,\mathrm{mH}$, $C = 5\,\mu\mathrm{F}$, $R_2 = 1\,\mathrm{k}\Omega$ とします.

$$
\begin{aligned}
a &= CL\frac{R_2}{R_1 + R_2} = 5 \times 10^{-6} \cdot 5 \times 10^{-3} \frac{500}{500 + 1000} = 1.67 \times 10^{-8} \\
b &= C(R_1 // R_2) + \frac{L}{R_1 + R_2} = 5 \times 10^{-6}(500 // 1000) + \frac{5 \times 10^{-3}}{500 + 1000} = 1.67 \times 10^{-3}
\end{aligned}
$$

となり，分母が 0 となる解は,

$$p_1 = -602.4, p_2 = -99600 \tag{189}$$

で，カットオフ周波数は,

$$f_1 = \frac{-p_1}{2\pi} = 95.9\,[\mathrm{Hz}], f_2 = \frac{-p_2}{2\pi} = 15900\,[\mathrm{Hz}] \tag{190}$$

となります.

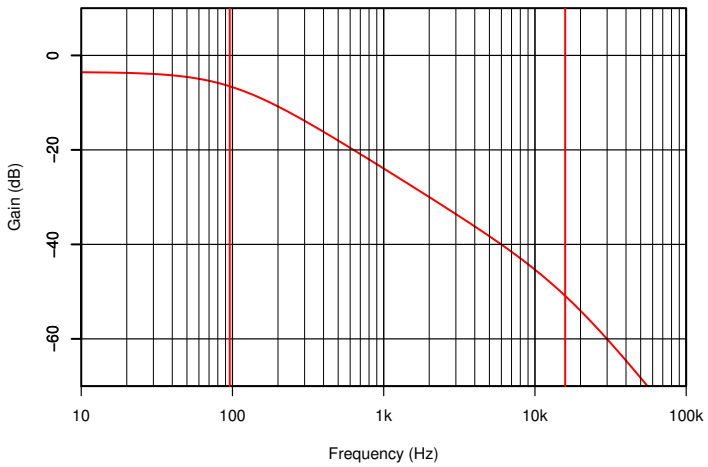

図 50: 判別式が正の場合

ゲインの周波数特性を求める R の関数は，次のようになります.

```
function (R1=500, L=5e-3, C=5e-6, R2=1e3)
{
```

```
    f <- dec(10, 100e3, 30)
    s <- 2 * pi * f * (0+1i)
    XL <- s * L
    XC <- 1/(s * C)
    Z <- XC %p% R2
    T <- Z / (R1 + XL + Z)

    semilogplot(f, dB(T), type="l", col="red",
        ylim=c(-70, 10), yaxs="i",
        xlab="Frequency (Hz)", ylab="Gain (dB)")
}
```

7.2 判別式が 0 の場合

この場合は，$1 + bs + as^2 = 0$ の解は重解となり，それを p とすると，伝達関数は，

$$T(s) = \frac{1}{(1 - s/p)^2} \tag{191}$$

となり，カットオフ周波数が $|p|$ のローパスフィルタを 2 段重ねたものになります．カットオフ周波数における減衰は -6 dB です．

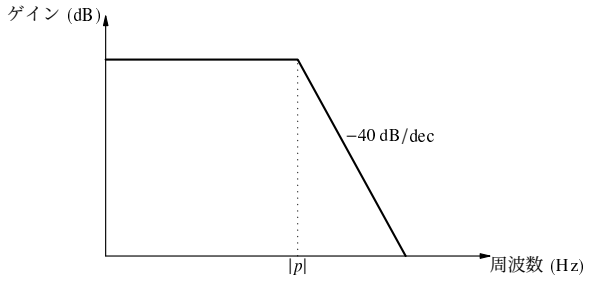

図 51: 判別式が 0 の場合

数値例 $R_1 = 500\,\Omega$, $L = 35.54$ mH, $C = 0.7035\,\mu$F, $R_2 = 1$ kΩ とします．

$$\begin{aligned} a &= CL\frac{R_2}{R_1 + R_2} = 0.7035 \times 10^{-6} \cdot 35.54 \times 10^{-3} \frac{500}{500 + 1000} = 1.67 \times 10^{-8} \\ b &= C(R_1 // R_2) + \frac{L}{R_1 + R_2} = 0.7035 \times 10^{-6}(500 // 1000) + \frac{35.54 \times 10^{-3}}{500 + 1000} = 2.58 \times 10^{-4} \end{aligned}$$

となり，分母が 0 となる解は，

$$p = -7740 \tag{192}$$

で，カットオフ周波数は，

$$f = \frac{-p}{2\pi} = 1230\,[\mathrm{Hz}] \tag{193}$$

となります．

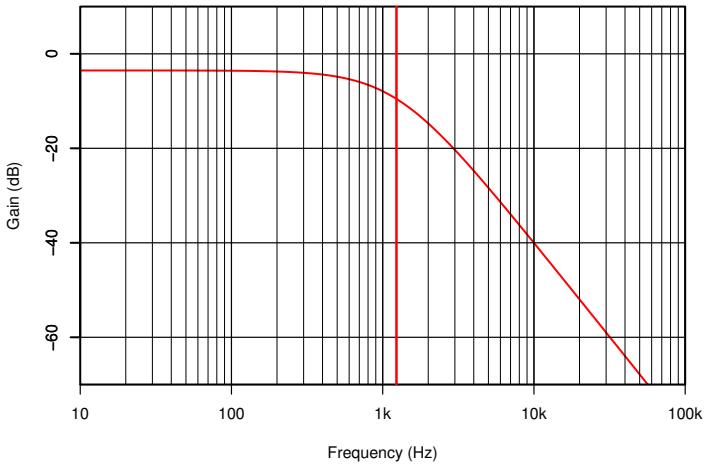

図 52: 判別式が 0 の場合

7.3 判別式が負の場合

この場合，分母が 0 となる解は複素数になります．

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{a}} \tag{194}$$

$$Q = \frac{\sqrt{a}}{b} \tag{195}$$

とおけば，伝達関数は次のようになります．

$$T(s) = \frac{1}{1 + \frac{1}{Q\omega_0}s + \frac{1}{\omega_0^2}s^2} \tag{196}$$

この場合，判別式は，

$$D = b^2 - 4a = \frac{1}{Q^2\omega_0^2} - \frac{4}{\omega_0^2} = \frac{1}{\omega_0^2}\left(\frac{1}{Q^2} - 4\right) \tag{197}$$

で，これが負になるのは，

$$\begin{aligned} D' = \frac{1}{Q^2} - 4 &< 0 \\ \frac{1}{Q^2} &< 4 \\ Q^2 &> \frac{1}{4} \\ Q &> \frac{1}{2} \end{aligned} \tag{198}$$

のときです．

ゲインを求めると，

$$T(j\omega) = \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + j\frac{\omega}{Q\omega_0}}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}-j\frac{\omega}{Q\omega_0}}{\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2+\left(\frac{\omega}{Q\omega_0}\right)^2} \\
|T(j\omega)| &= \frac{\sqrt{\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2+\left(\frac{\omega}{Q\omega_0}\right)^2}}{\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2+\left(\frac{\omega}{Q\omega_0}\right)^2} \\
&= \frac{1}{\sqrt{\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2+\left(\frac{\omega}{Q\omega_0}\right)^2}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{\frac{\omega^4}{\omega_0^4}+(\frac{1}{Q^2\omega_0^2}-\frac{2}{\omega_0^2})\omega^2+1}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{\frac{\omega^4}{\omega_0^4}+\frac{1}{\omega_0^2}(\frac{1}{Q^2}-2)\omega^2+1}} \qquad (199) \\
&= \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\omega_0^4}\{\omega^4+\omega_0^2(\frac{1}{Q^2}-2)\omega^2\}+1}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\omega_0^4}\{\omega^2+\omega_0^2(\frac{1}{2Q^2}-1)\}^2-(\frac{1}{2Q^2}-1)^2+1}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\omega_0^4}\{\omega^2+\omega_0^2(\frac{1}{2Q^2}-1)\}^2+\frac{Q^2-1/4}{Q^4}}} \qquad (200)
\end{aligned}
$$

したがって，分母の根号の中は $\omega^2=\omega_0^2(1-1/2Q^2)$ のときに，最小値 $(Q^2-1/4)/Q^4$ をとります．このとき，ゲインは最大になります．

$$\omega_{\text{peak}} = \sqrt{1-\frac{1}{2Q^2}}\,\omega_0 \qquad (201)$$

$$A_{\text{peak}} = \frac{Q^2}{\sqrt{Q^2-1/4}} \qquad (202)$$

ピークができる条件は，

$$
\begin{aligned}
1-\frac{1}{2Q^2} &> 0 \\
\frac{1}{2Q^2} &< 1 \\
2Q^2 &> 1 \\
Q^2 &> \frac{1}{2} \\
Q &> \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad (203)
\end{aligned}
$$

であり，$Q=1/\sqrt{2}$ のときに最大平坦特性 (バタワース特性) となります．

また，$\omega=\omega_0$ のとき，式 (199) より，

$$|T(j\omega_0)| = \frac{1}{\sqrt{1+1/Q^2-2+1}} = Q \qquad (204)$$

となり，Q は，カットオフ周波数 ω_0 におけるゲインを表していることがわかります．

数値例　$R_1 = 100\,\Omega$, $L = 50\,\mathrm{mH}$, $C = 0.5\,\mu\mathrm{F}$, $R_2 = 1\,\mathrm{k}\Omega$ とします.

$$
\begin{aligned}
a &= CL\frac{R_2}{R_1+R_2} = 0.5\times10^{-6}\cdot 50\times10^{-3}\frac{100}{100+1000} = 2.27\times10^{-8}\\
b &= C(R_1//R_2) + \frac{L}{R_1+R_2} = 0.5\times10^{-6}(100//1000) + \frac{50\times10^{-3}}{100+1000} = 9.09\times10^{-5}\\
\omega_0 &= \frac{1}{\sqrt{a}} = 6630\,[\mathrm{rad/s}] = 1056\,[\mathrm{Hz}]\\
Q &= \frac{\sqrt{a}}{b} = 1.66
\end{aligned}
$$

となります. ピークの周波数と, そのときのゲインは,

$$
\begin{aligned}
\omega_{\mathrm{peak}} &= \sqrt{1-\frac{1}{2Q^2}}\,\omega_0 = 6000\,[\mathrm{rad/s}] = 955\,[\mathrm{Hz}]\\
A_{\mathrm{peak}} &= \frac{Q^2}{\sqrt{Q^2-1/4}} = 1.74
\end{aligned}
$$

です. このゲインは, 低域のゲイン $R_2/(R_1+R_2)$ に対するものです.

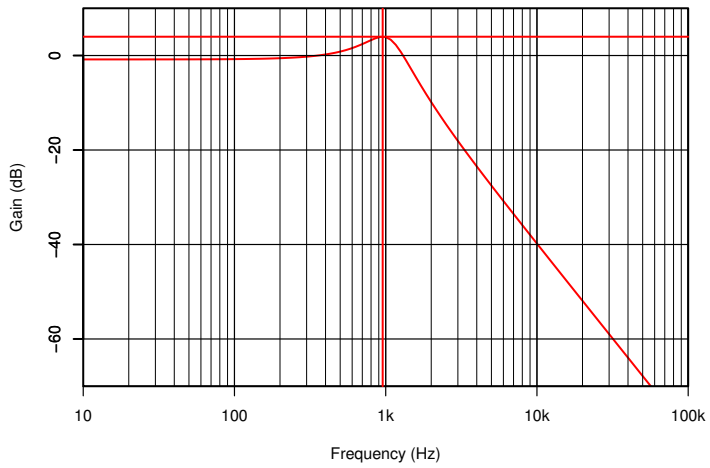

図 53: 判別式が負の場合

バタワース特性となるのは, たとえば, $R_1 = 500\,\Omega$, $L = 57.87\,\mathrm{mH}$, $C = 0.432\,\mu\mathrm{F}$, $R_2 = 1\,\mathrm{k}\Omega$ のときで, 特性は, 図 54のようになります. このとき, カットオフ周波数におけるゲインは -3 dB となります.

7.4　まとめ

2 次の伝達関数は, 次のように表すこともあります.

$$
T(s) = \frac{1}{1+s\frac{1}{Q\omega_0}+s^2\frac{1}{\omega_0^2}} = \frac{1}{1+s\frac{2\zeta}{\omega_0}+s^2\frac{1}{\omega_0^2}} = \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2+2s\zeta\omega_0+s^2} \tag{205}
$$

ζ は減衰係数と呼ばれ, Q とは,

$$
\zeta = \frac{1}{2Q}, \qquad Q = \frac{1}{2\zeta} \tag{206}
$$

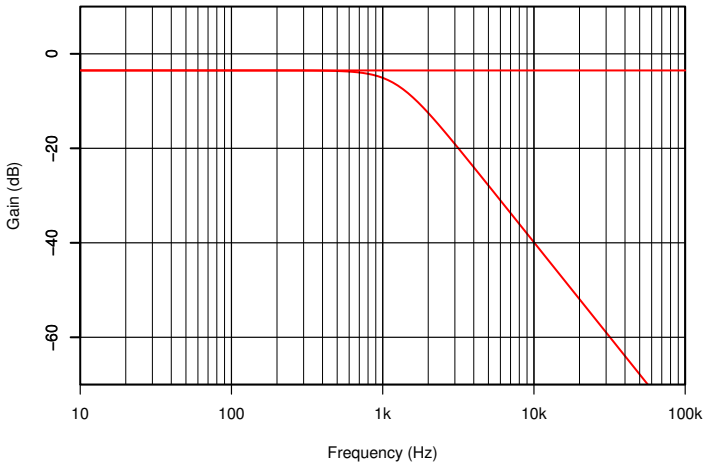

図 54: バタワース特性

という関係にあります.

Q, ζ と特性の関係を，以下に示します.

Q	$< \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$> \frac{1}{\sqrt{2}}$
ζ	> 1	1	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$< \frac{1}{\sqrt{2}}$
解	実 2	実 1	複素数		
ピーク	なし				あり

7.5 2 段 CR ローパスフィルタ

フィルタの効きをよくするために，図 55のように CR ローパスフィルタを重ねることがあります.

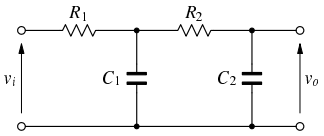

図 55: 2 段ローパスフィルタ

伝達関数は，次のようになります.

$$T(s) = \frac{1}{1 + s(C_1R_1 + C_2R_2 + C_2R_1) + s^2C_1C_2R_1R_2} \tag{207}$$

これより，

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{C_1C_2R_1R_2}} \tag{208}$$

$$Q = \frac{\sqrt{C_1C_2R_1R_2}}{C_1R_1 + C_2R_2 + C_2R_1} \tag{209}$$

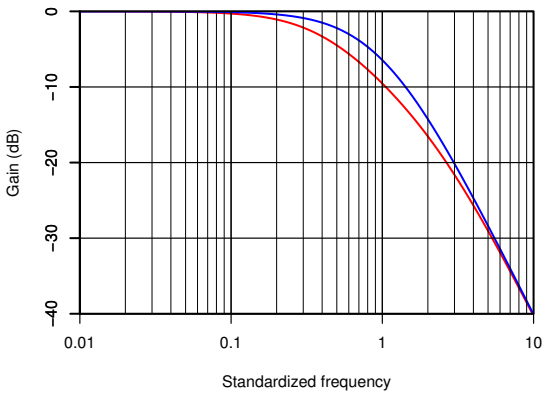

図 56: 2 段ローパスフィルタの周波数特性

$R_1 = R_2, C_1 = C_2$ とすると，$Q = 1/3$ となります．図 56の赤い線が，この場合です．
$R_2 = 10R_1, C_2 = C_1/10$ とすると，

$$Q = \frac{C_1 R_1}{2C_1 R_1 + 0.1 C_1 R_1} = \frac{1}{2.1} = 0.476 \tag{210}$$

となります．図 56の青い線が，この場合です．このように，後段のインピーダンスを高くすることにより，Q を大きくすることができますが，0.5 が限界です．すなわち，ω_0 でゲインが −6 dB 以下となります．このように，CR だけではバタワース特性 (ω_0 で −3 dB) を得ることはできません．

7.6 出力トランスの漏れインダクタンスと浮遊容量

東栄変成器のシングル用出力トランス T-850 7k の 3 kΩ タップの漏れインダクタンス L_l，浮遊容量 C_s は，実測値で，

$$\begin{aligned} R_L &= 3\,\mathrm{k\Omega} \\ L_l &= 31\,\mathrm{mH} \\ C_s &= 460\,\mathrm{pF} \end{aligned}$$

です．これを 6BM8 の五極管接続と三極管接続でドライブした場合を考えます．等価回路は，図 57のようになります．

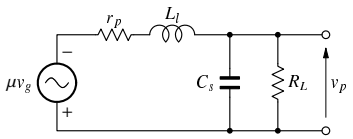

図 57: 出力段の高域等価回路

まず五極管接続ですが，動作点を $E_p = 200\,\mathrm{V}, E_{g2} = 200\,\mathrm{V}, E_g = -15.3\,\mathrm{V}, I_p = 35\,\mathrm{mA}$ とすれば，三定数は $\mu = 125, g_m = 5.3\,\mathrm{mS}, r_p = 23.5\,\mathrm{k\Omega}$ となります．したがって，

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{r_p + R_L}{C_s L_l R_L}} = 125\,[\mathrm{kHz}]$$

$$Q = \frac{\sqrt{\frac{C_s L_l R_L}{r_p + R_L}}}{C_s(r_p // R_L) + L_l/(r_p + R_L)} = 0.53$$

となり，ピークは生じませんが，やや肩の張った特性となります (図 58の赤い線).

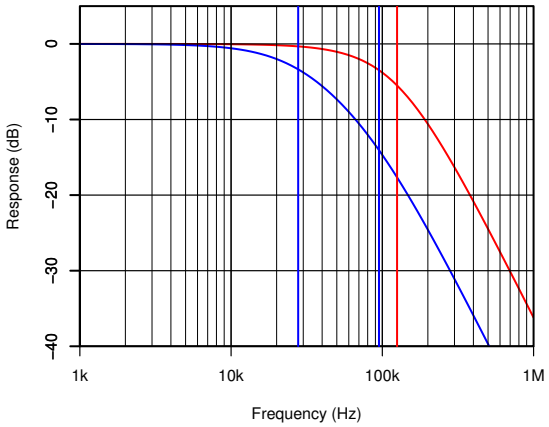

図 58: 出力段の周波数特性

三極管接続の場合，動作点を $E_p = 200\,\mathrm{V}$, $E_g = -16.5\,\mathrm{V}$, $I_p = 35\,\mathrm{mA}$ とすれば，三定数は $\mu = 8.3$, $g_m = 5.7\,\mathrm{mS}$, $r_p = 1.46\,\mathrm{k\Omega}$ となります．したがって，

$$\omega_0 = 51\,[\mathrm{kHz}]$$
$$Q = 0.42$$

となり，五極管接続よりもカットオフ周波数が下がり，また Q も低くなります (図 58の青い線).

今回の例ではピークが生じませんでしたが，五極管接続では場合によってはピークが生じることもあるでしょう.

2 次の負荷を開放にすると，特に三極管接続の場合にピークが生じやすくなります.

演習 5

LCR によるローパスフィルタ，CR による 2 段ローパスフィルタ，出力トランスの漏れインダクタンスと浮遊容量の例を SPICE でシミュレーションしてみましょう.

回答例 5

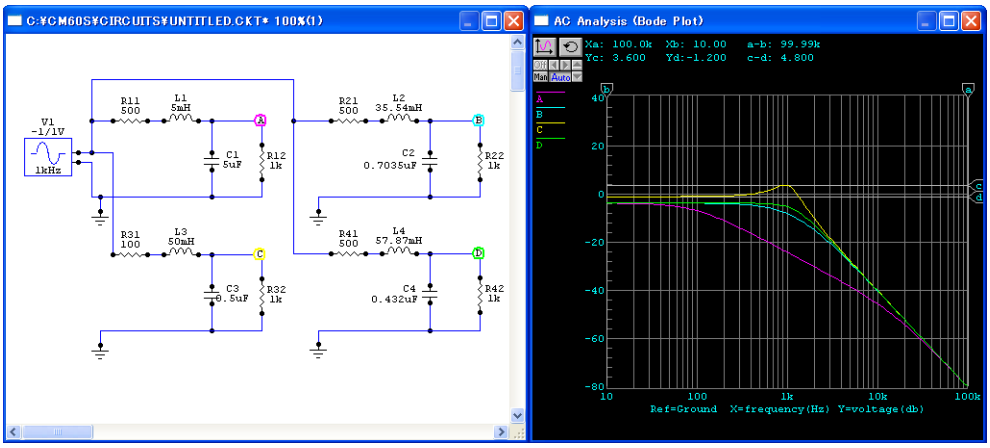

図 59: LCR によるローパスフィルタ

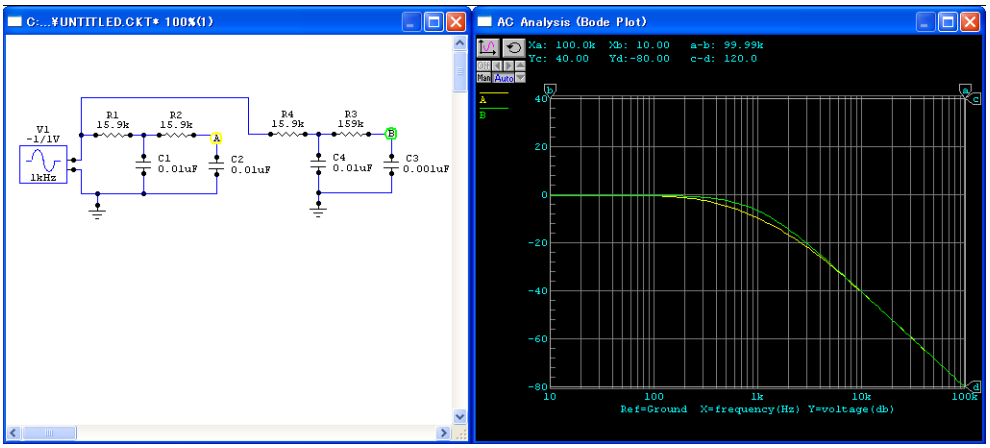

図 60: CR による 2 段ローパスフィルタ

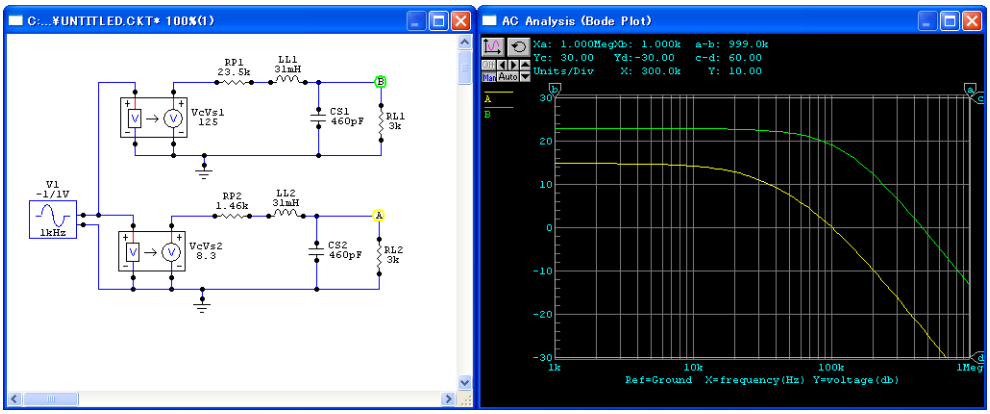

図 61: 出力トランスの漏れインダクタンスと浮遊容量の影響

8　能動素子の等価回路とポール

8.1　真空管の等価回路

電極間容量を含めた真空管の等価回路は，図 62のようになります．左側は電圧源による等価回路で，主に三極管に使い，右側は電流源による等価回路で，主に五極管に使いますが，両者ともまったく等価なので，どちらを使ってもかまいません．

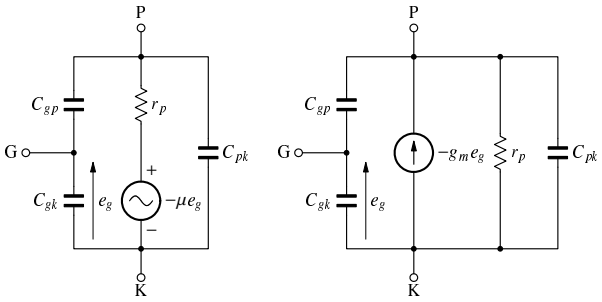

図 62: 真空管の等価回路

8.2　能動素子一般の等価回路

真空管，バイポーラトランジスタ (BJT)，電界効果トランジスタ (FET) の等価回路は，すべて図 63で表されます．

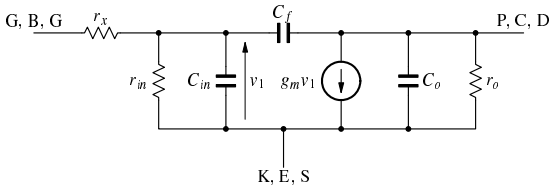

図 63: 能動素子の等価回路

それぞれの素子の値は，以下のようになります．

汎用モデル	真空管	BJT	FET
r_x	0	r_b	0
r_{in}	∞	r_π	∞
C_{in}	C_{gk}	C_π	C_{gs}
C_f	C_{gp}	C_μ	C_{gd}
C_o	C_{pk}	C_o	C_{ds}
r_o	r_p	r_o	r_o

8.3　増幅回路の等価回路

実際の回路から等価回路に変換するには，次の手順で行います．

1. 能動素子の代わりに，図 63をあてはめる．
2. 電源 (電圧源) は短絡し，電流源は開放する．電源のインピーダンスの影響を調べる場合は，この限りではない．
3. コンデンサ，コイルに関しては，分析の目的，周波数帯域に応じて適宜短絡したり，開放したりする．
4. テブナンの定理，ノートンの定理などを使って，素子の数を減らす．

図 64のような，2 段のカソード接地電圧増幅回路を例にします．入力のボリューム R_{g1} は，後述のミラー効果によりもっとも高域特性が悪くなる半分の位置に設定します．

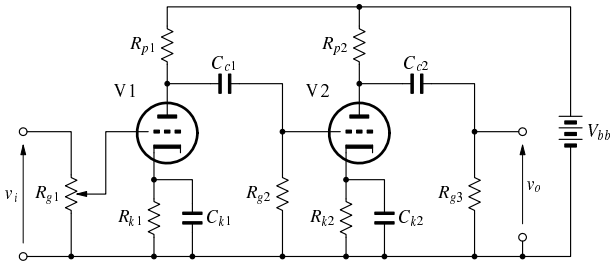

図 64: 2 段カソード接地電圧増幅回路

この回路に能動素子の等価回路をあてはめると，図 65のようになります．

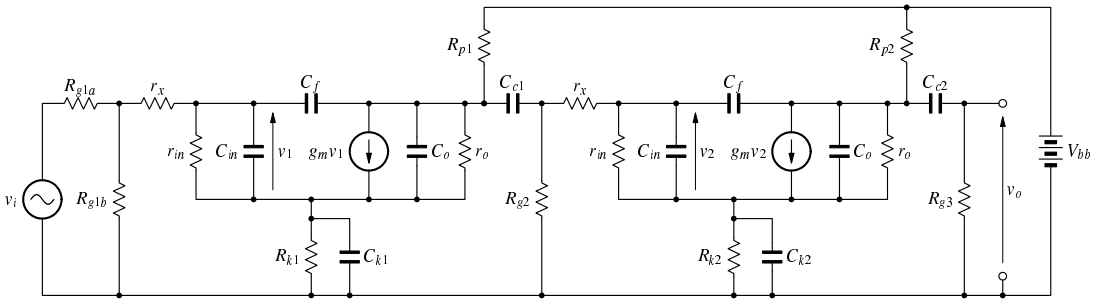

図 65: 能動素子を等価回路で置き換える

今回は，電源のインピーダンスを 0 とするので，電源を短絡します．

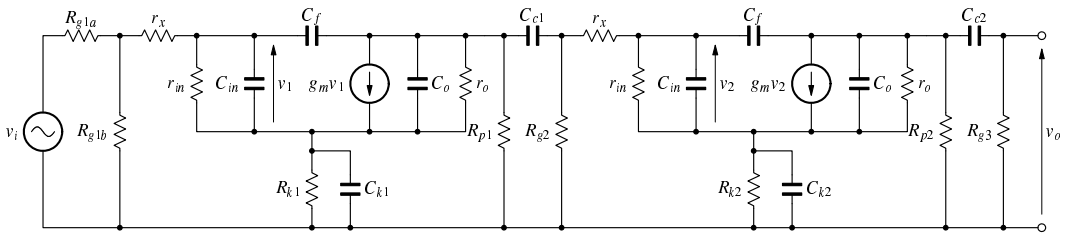

図 66: 電源を短絡

8.4 中域の等価回路

中域では，カップリングコンデンサ C_{c1}, C_{c2} およびカソードバイパスコンデンサ C_{k1}, C_{k2} は短絡と見なせます．また，電極間容量は開放とみなせます．入力から V2 のグリッドまでの等価回路は，図 67のようになります．

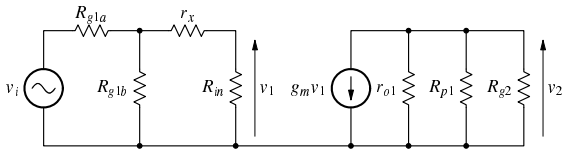

図 67: 中域の等価回路

V1 のグリッド，すなわち R_{g1a} と R_{g1b} の接続点から左側のインピーダンス R_s を調べると，

$$R_s = R_{g1a} // R_{g1b} = \frac{R_{g1}}{4} \tag{211}$$

であり，この点に負荷をつながない，開放時の電圧 v_0 は，

$$v_0 = \frac{R_{g1b}}{R_{g1a} + R_{g1b}} v_i = \frac{v_i}{2} \tag{212}$$

となりますから，テブナンの定理により，図 68(a) のように簡略化されます．出力側の 3 個の抵抗

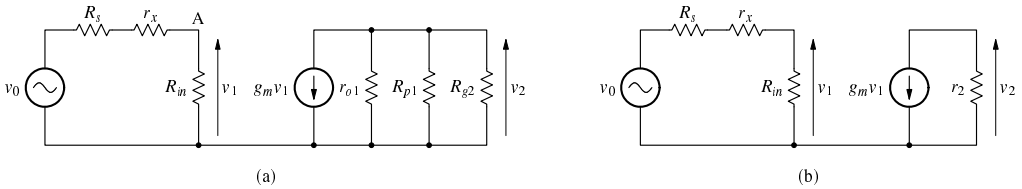

図 68: 中域の等価回路 (2)

は並列接続ですので，その合成値を $R_2 = r_{o1} // R_{p1} // R_{g2}$ とおけば，等価回路は図 68(b) のように簡略化されます．

これより，

$$v_1 = \frac{r_{in}}{R_s + r_x + r_{in}} v_0 \tag{213}$$

$$\begin{aligned} v_2 &= -g_m v_1 R_2 \\ &= -v_0 \frac{r_{in}}{R_s + r_x + r_{in}} g_m R_2 \end{aligned} \tag{214}$$

となり，v_0 から v_2 への中域のゲイン A_M は，

$$A_M = \frac{v_2}{v_0} = -\frac{r_{in}}{R_s + r_x + r_{in}} g_m R_2 \tag{215}$$

となります．今回は，能動素子が真空管なので，$r_{in} = \infty$ ですから，

$$A_M = -g_m R_2 \tag{216}$$

となります．

8.5 低域の等価回路

低域では，カップリングコンデンサ C_{c1}, C_{c2} のインピーダンスが無視できなくなってきます．ここでは，カソードバイパスコンデンサ C_{k1}, C_{k2} は十分に大きく，インピーダンスを無視できるとします．等価回路は，図 69のようになります．ここで，$R'_2 = r_o//R_{p1}$ です．

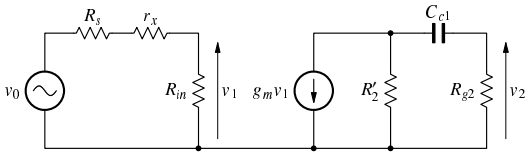

図 69: 低域の等価回路

これより，

$$
\begin{aligned}
v_2 &= -g_m v_1 \{R'_2//(1/sC_{c1} + R_{g2})\} \frac{R_{g2}}{1/sC_{c1} + R_{g2}} \\
&= -g_m v_1 \frac{R'_2(1/sC_{c1} + R_{g2})}{R'_2 + 1/sC_{c1} + R_{g2})} \cdot \frac{R_{g2}}{1/sC_{c1} + R_{g2}} \\
&= -g_m v_1 \frac{R'_2 R_{g2}}{R'_2 + 1/sC_{c1} + R_{g2}} \\
&= -g_m v_1 \frac{R'_2 R_{g2}}{R'_2 + R_{g2}} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{sC_{c1}(R'_2 + R_{g2})}} \\
&= -g_m R_2 v_1 \frac{1}{1 + \frac{1}{sC_{c1}(R'_2 + R_{g2})}} \\
T_L(s) &= A_M \frac{1}{1 + \frac{1}{sC_{c1}(r_o//R_{p1} + R_{g2})}} \qquad (217)
\end{aligned}
$$

となって，時定数が $C_{c1}(r_o//R_{p1} + R_{g2})$ の 1 次のハイパス特性であることがわかります．

真空管の場合，より直感的に求めるには，電圧源による等価回路を使います．図 70(a) の A 点

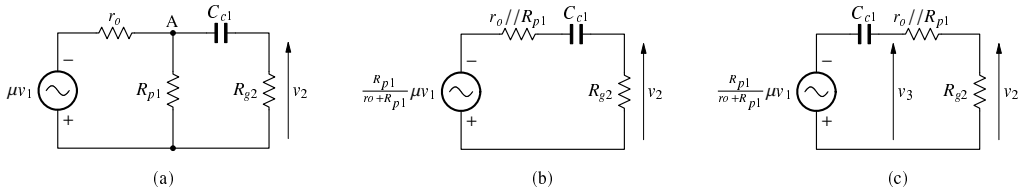

図 70: 低域の等価回路 (2)

より左側のインピーダンスと開放時の電圧から，テブナンの定理を使って (b) のように変形し，抵抗とコンデンサを入れ替えると (c) になります．この回路の v_3 は v_1 に対してローパス特性であり，時定数は $C_{c1}(r_o//R_{p1} + R_{g2})$ であることは明らかです．v_1 と v_2 の関係は，

$$
\begin{aligned}
v_2 &= -\frac{R_{p1}}{r_o + R_{p1}} \mu v_1 \cdot \frac{R_{g2}}{1/sC_{c1} + r_o//R_{p1} + R_{g2}} \\
&= -\mu v_1 \frac{R_{p1}}{r_o + R_{p1}} \cdot \frac{R_{g2}}{r_o//R_{p1} + R_{g2}} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{sC_{c1}(r_o//R_{p1} + R_{g2})}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= -v_1 g_m r_o \frac{R_{p1}}{r_o + R_{p1}} \cdot \frac{R_{g2}}{\frac{r_o R_{p1}}{r_o + R_{p1}} + R_{g2}} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{sC_{c1}(r_o // R_{p1} + R_{g2})}} \\
&= -v_1 g_m \frac{r_o R_{p1} R_{g2}}{r_o R_{p1} + r_o R_{g2} + R_{p1} R_{g2}} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{sC_{c1}(r_o // R_{p1} + R_{g2})}} \\
&= -v_1 g_m \frac{1}{\frac{1}{r_o} + \frac{1}{R_{p1}} + \frac{1}{R_{g2}}} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{sC_{c1}(r_o // R_{p1} + R_{g2})}} \\
&= -v_1 g_m (r_o // R_{p1} // R_{g2}) \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{sC_{c1}(r_o // R_{p1} + R_{g2})}} \qquad (218)
\end{aligned}
$$

となり，先程の結果と一致します．

8.5.1 数値例

V1 として 12AX7 を使い，$V_{bb} = 200\,\mathrm{V}$, $R_{p1} = 220\,\mathrm{k\Omega}$, $R_{k1} = 3.3\,\mathrm{k\Omega}$, $R_{g2} = 470\,\mathrm{k\Omega}$, $C_{k1} = 47\,\mu\mathrm{F}$, $C_{c1} = 0.1\,\mu\mathrm{F}$ とします．このとき，V1 の動作点は，$E_p = 115.9\,\mathrm{V}$, $E_g = -1.24\,\mathrm{V}$, $I_p = 0.38\,\mathrm{mA}$ であり，三定数は，$\mu = 95.6$, $r_p = 89.4\,\mathrm{k\Omega}$, $g_m = 1.07\,\mathrm{mS}$ です．

これより，

$$
\begin{aligned}
R_2' &= r_p // R_{p1} = 89.4 \times 10^3 // 220 \times 10^3 = 63.6 \times 10^3\ [\Omega] \\
R_2 &= r_p // R_{p1} // R_{g2} = 89.4 \times 10^3 // 220 \times 10^3 // 470 \times 10^3 = 56 \times 10^3\ [\Omega] \\
A_M &= -g_m R_2' = 1.07 \times 10^{-3} \cdot 56 \times 10^3 = -60 \\
p &= -\frac{1}{C_{c1}(R_2' + R_{g2})} = -\frac{1}{0.1 \times 10^{-6}(63.6 \times 10^3 + 470 \times 10^3)} = -18.7\,[\mathrm{rad/s}] = -3\,[\mathrm{Hz}]
\end{aligned}
$$

となります．周波数特性は，図 71のようになります．SPICE によるシミュレーションは，図 72の

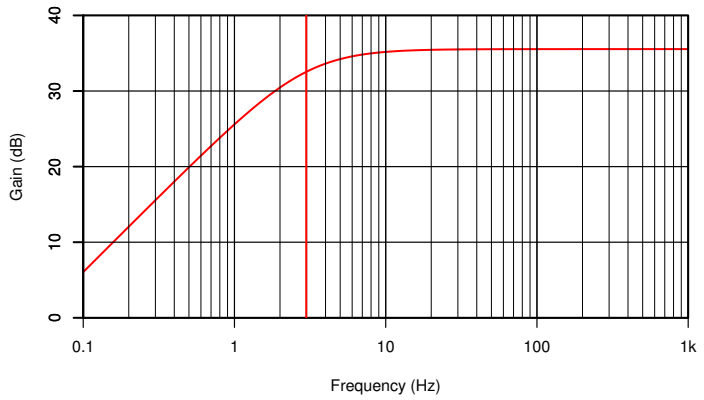

図 71: カップリングコンデンサによる低域特性

ようになります．

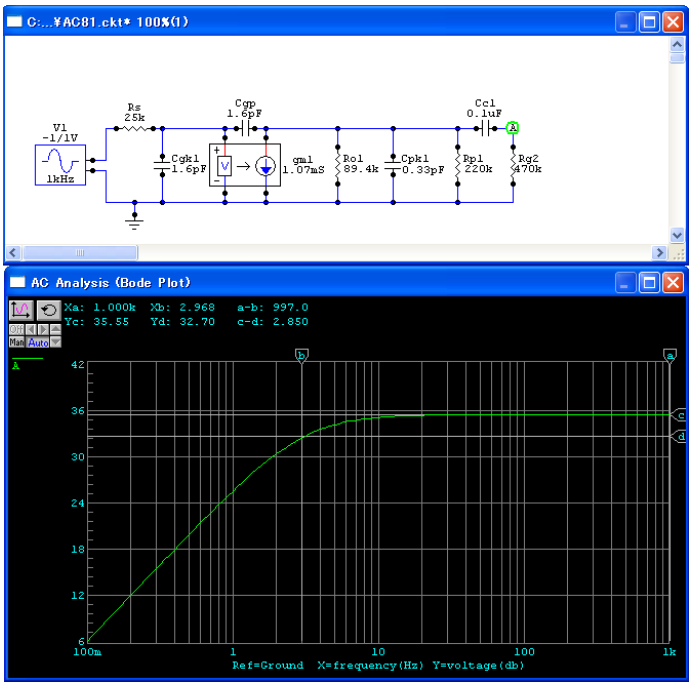

図 72: カップリングコンデンサによる低域特性のシミュレーション

8.6 カソードバイパスコンデンサの影響

ここでは，カップリングコンデンサ C_{c1} が十分大きな場合を考えます．カソードからグラウンドの間のインピーダンスを Z_k とすると，等価回路は，図 73のようになります．

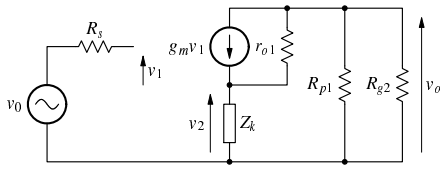

図 73: カソードにインピーダンスを入れた等価回路

電流源から電圧源に変更し，負荷をまとめて $R_2 = R_{p1}//R_{g2}$ とすると，等価回路は，図 74のようになります．

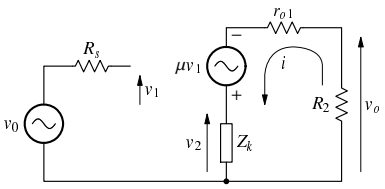

図 74: カソードにインピーダンスを入れた等価回路 (2)

この等価回路から，

$$
\begin{aligned}
v_0 &= v_1 + v_2 && (219)\\
i &= \frac{\mu v_1}{Z_k + r_{o1} + R_2} && (220)\\
v_2 &= iZ_k && (221)\\
v_o &= -iR_2 && (222)
\end{aligned}
$$

が成り立ちます．式 (219) より，

$$v_1 = v_0 - v_2$$

これを式 (220) に代入して，

$$i = \frac{\mu(v_0 - v_2)}{Z_k + r_{o1} + R_2}$$

これを式 (221) に代入すると，

$$
\begin{aligned}
v_2 &= \mu(v_0 - v_2)\frac{Z_k}{Z_k + r_{o1} + R_2}\\
v_2\{(1+\mu)Z_k + r_{o1} + R_2\} &= \mu v_0 Z_k\\
v_2 &= \frac{\mu Z_k}{(1+\mu)Z_k + r_{o1} + R_2} v_0 && (223)
\end{aligned}
$$

これらを使うと，出力電圧は，

$$
\begin{aligned}
v_o &= -\mu(v_0 - v_2)\frac{R_2}{Z_k + r_{o1} + R_2}\\
&= -\mu v_0\left[1 - \frac{\mu Z_k}{(1+\mu)Z_k + r_{o1} + R_2}\right]\frac{R_2}{Z_k + r_{o1} + R_2}\\
&= -\mu v_0 \frac{(1+\mu)Z_k + r_{o1} + R_2 - \mu Z_k}{(1+\mu)Z_k + r_{o1} + R_2}\cdot\frac{R_2}{Z_k + r_{o1} + R_2}\\
&= -\mu v_0 \frac{R_2}{(1+\mu)Z_k + r_{o1} + R_2} && (224)
\end{aligned}
$$

となります．これを等価回路で表すと，図 75のようになります．すなわち，カソード側に入っているインピーダンスは，$(1+\mu)$ 倍して，プレート側にあるとして分析できます．

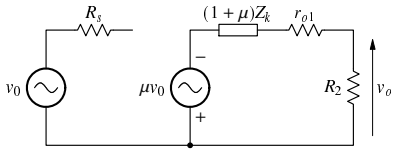

図 75: カソードにインピーダンスを入れた等価回路 (3)

つまり，抵抗値は $(1+\mu)$ 倍に，コンデンサの容量は $1/(1+\mu)$ 倍にしてプレート側に移します．このようにして得られた等価回路は，図 76のようになります．

したがって，C_{k1} と R_{k1} の並列部分のインピーダンスを Z とおけば，

$$Z = \frac{1}{\frac{sC_{k1}}{1+\mu} + \frac{1}{(1+\mu)R_{k1}}} = \frac{(1+\mu)R_{k1}}{1 + sC_{k1}R_{k1}} \qquad (225)$$

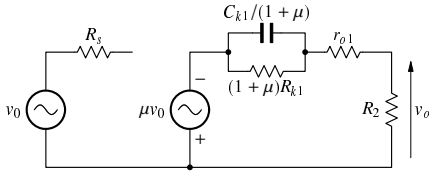

図 76: カソードにインピーダンスを入れた等価回路 (4)

v_0 から v_o への伝達関数は,

$$
\begin{aligned}
T(s) &= -\mu \frac{R_2}{Z + r_{o1} + R_2} \\
&= -\mu \frac{R_2}{\frac{(1+\mu)R_{k1}}{1+sC_{k1}R_{k1}} + r_{o1} + R_2} \\
&= -\mu \frac{R_2(1 + sC_{k1}R_{k1})}{(1+\mu)R_{k1} + (r_{o1} + R_2)(1 + sC_{k1}R_{k1})} \\
&= -\mu \frac{R_2(1 + sC_{k1}R_{k1})}{r_{o1} + R_2 + (1+\mu)R_{k1} + sC_{k1}R_{k1}(r_{o1} + R_2)} \\
&= -\mu \frac{R_2}{(1+\mu)R_{k1} + r_{o1} + R_2} \cdot \frac{1 + sC_{k1}R_{k1}}{1 + sC_{k1}\frac{R_{k1}(r_{o1}+R_2)}{(1+\mu)R_{k1}+r_{o1}+R_2}} \\
&= -\mu \frac{R_2}{(1+\mu)R_{k1} + r_{o1} + R_2} \cdot \frac{1 + sC_{k1}R_{k1}}{1 + sC_{k1}\frac{R_{k1}(r_{o1}+R_2)/(1+\mu)}{[(1+\mu)R_{k1}+r_{o1}+R_2]/(1+\mu)}} \\
&= -\mu \frac{R_2}{(1+\mu)R_{k1} + r_{o1} + R_2} \cdot \frac{1 + sC_{k1}R_{k1}}{1 + sC_{k1}\frac{R_{k1}\frac{r_{o1}+R_2}{1+\mu}}{R_{k1}+\frac{r_{o1}+R_2}{1+\mu}}} \\
&= -\mu \frac{R_2}{(1+\mu)R_{k1} + r_{o1} + R_2} \cdot \frac{1 + sC_{k1}R_{k1}}{1 + sC_{k1}(R_{k1}//\frac{r_{o1}+R_2}{1+\mu})}
\end{aligned}
\tag{226}
$$

したがって，この回路の低域のゲインは $A_0 = -\mu R_2/[(1+\mu)R_{k1} + r_{o1} + R_2]$ で，ゼロとポールは,

$$z = -\frac{1}{C_{k1}R_{k1}} \tag{227}$$

$$p = -\frac{1}{C_{k1}(R_{k1}//\frac{r_{o1}+R_2}{1+\mu})} \tag{228}$$

で，$|z| < |p|$ ですから，周波数特性は，図 77のようになります.

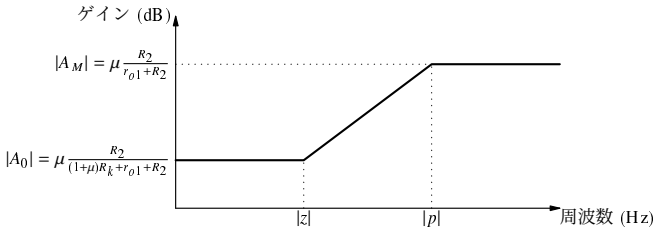

図 77: カソードバイパスコンデンサの影響

8.6.1 数値例

V1 として 12AX7 を使い，$V_{bb} = 200\,\mathrm{V}$, $R_{p1} = 220\,\mathrm{k\Omega}$, $R_{k1} = 3.3\,\mathrm{k\Omega}$, $R_{g2} = 470\,\mathrm{k\Omega}$, $C_{k1} = 47\,\mu\mathrm{F}$, $C_{c1} = 0.1\,\mu\mathrm{F}$ とします．このとき，V1 の動作点は，$E_p = 115.9\,\mathrm{V}$, $E_g = -1.24\,\mathrm{V}$, $I_p = 0.38\,\mathrm{mA}$ であり，三定数は，$\mu = 95.6$, $r_p = 89.4\,\mathrm{k\Omega}$, $g_m = 1.07\,\mathrm{mS}$ です．

これより，

$$
\begin{aligned}
R_2 &= R_{p1}//R_{g2} = 220\times10^3\cdot470\times10^3 = 150\times10^3\,[\Omega] \\
A_0 &= -\mu\frac{R_2}{(1+\mu)R_{k1}+r_p+R_2} = -95.6\frac{150}{(1+95.6)3.3+89.4+150} = -25.7 \\
A_M &= -\mu\frac{R_2}{r_p+R_2} = -95.6\frac{150}{89.4+150} = -60 \\
z &= -\frac{1}{47\times10^{-6}\cdot3.3\times10^3} = -6.4\,[\mathrm{rad/s}] = -1.03\,[\mathrm{Hz}] \\
p &= -\frac{1}{C_{k1}(R_{k1}//\frac{r_{o1}+R_2}{1+\mu})} = -15\,[\mathrm{rad/s}] = 2.4\,[\mathrm{Hz}]
\end{aligned}
$$

となります．周波数特性は，図 78のようになります．SPICE によるシミュレーションは，図 79の

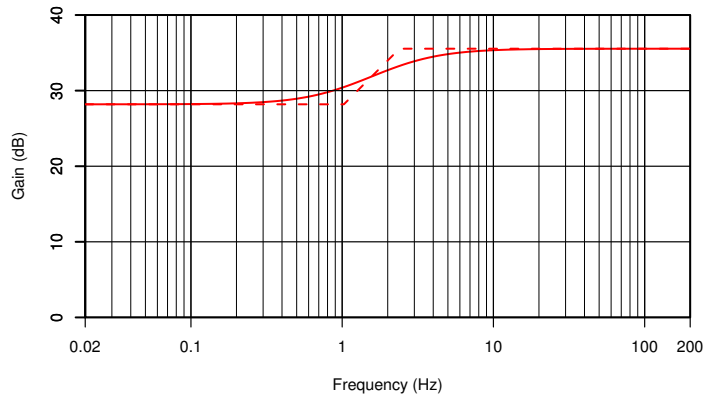

図 78: カソードバイパスコンデンサによる低域特性

ようになります．

8.7 高域の等価回路—ミラー効果

高域の等価回路は，V2 の入力容量を無視すれば，図 80(a) のようになります．入力信号の部分にテブナンの定理を使い，負荷の抵抗をまとめると，(b) のようになります．

このとき，点 A から C_f に流れる電流 i_1 は，

$$
i_1 = \frac{v_1 - v_2}{X_{C_f}} = (v_1 - v_2)sC_f \tag{229}
$$

となります．v_1 から v_2 への伝達関数には s が含まれるのですが，これを中域のゲイン A_M で一定と仮定すれば，

$$
v_2 = A_M v_1 = -g_m R_2 v_1 \tag{230}
$$

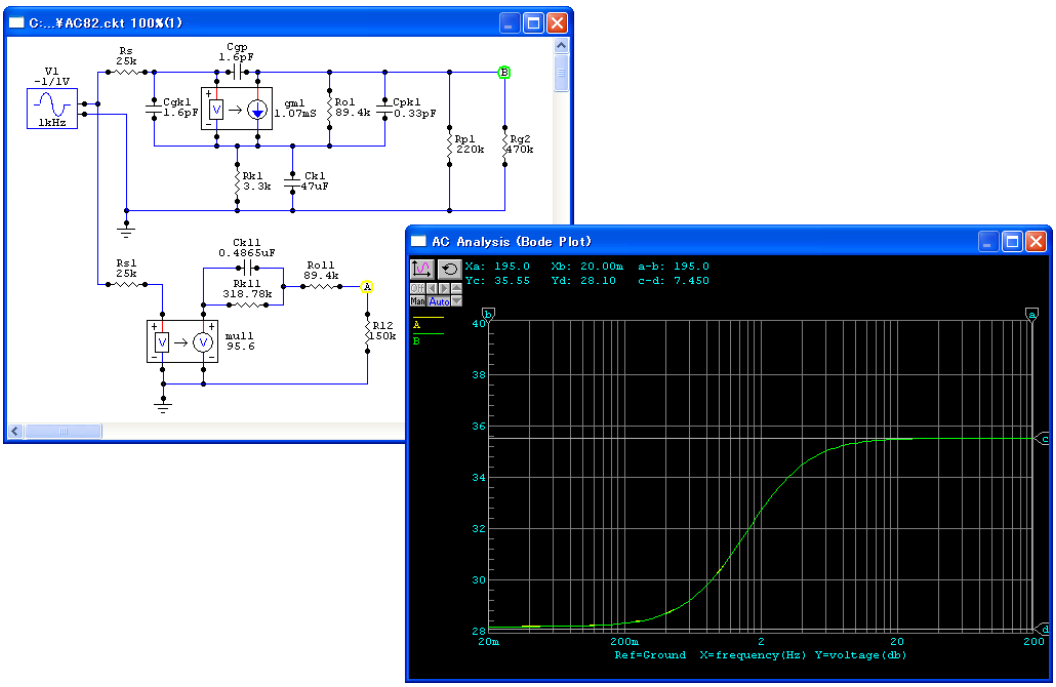

図 79: カソードバイパスコンデンサによる低域特性のシミュレーション

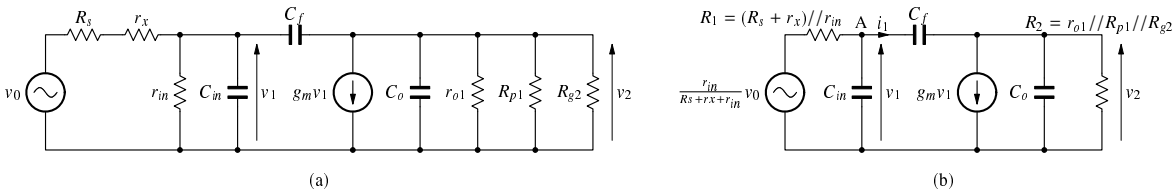

図 80: 高域の等価回路

これを，式 (229) に代入すると，

$$i_1 = (1 + g_m R_2) v_1 s C_f = v_1 s (1 + g_m R_2) C_f = v_1 s (1 + |A_M|) C_f \tag{231}$$

となり，$C_M = (1 + |A_M|) C_f$ とおけば，この容量のコンデンサが A 点からグラウンドにつながれたように見えます (図 81)．このように，C_f が増幅器のゲイン倍されて入力容量に付加されることを，発見者の名前をとって**ミラー効果** (Miller effect) といいます．この等価回路は，入力側の周波数特性を近似したものであり，C_f を通して入力から出力へ，あるいは出力から入力へ信号が伝達されることを無視しています[7]．

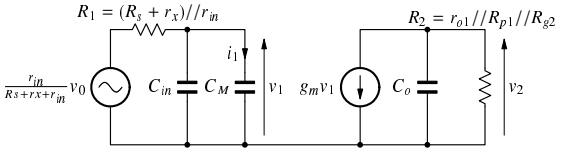

図 81: ミラー効果

この等価回路より，$C_t = C_{in} + C_M$ とおけば，

$$\begin{aligned}
v_1 &= \frac{r_{in}}{R_s + r_x + r_{in}} \cdot \frac{\frac{1}{sC_t}}{R_1 + \frac{1}{sC_t}} v_0 \\
&= \frac{r_{in}}{R_s + r_x + r_{in}} \cdot \frac{1}{1 + sR_1C_t} v_0 \\
v_2 &= -g_m v_1 (R_2 // \frac{1}{sC_o}) \\
&= -g_m v_1 \frac{R_2/sC_o}{R_2 + 1/sC_o} \\
&= -g_m v_1 \frac{R_2}{1 + sR_2C_o} \\
&= -v_0 \frac{r_{in}}{R_s + r_x + r_{in}} \cdot g_m R_2 \cdot \frac{1}{1 + sR_1C_t} \cdot \frac{1}{1 + sR_2C_o} \\
&= -v_0 \frac{r_{in}}{R_s + r_x + r_{in}} \cdot g_m R_2 \cdot \frac{1}{1 - s/p_1} \cdot \frac{1}{1 - s/p_2}
\end{aligned} \tag{233}$$

となります．ここで，

$$p_1 = -\frac{1}{R_1 C_t} = -\frac{1}{[(R_s + r_x)//r_{in}] \cdot [C_{in} + (1 + g_m R_2) C_f]} \tag{234}$$

$$p_2 = -\frac{1}{R_2 C_o} = -\frac{1}{(r_{o1}//R_{p1}//R_{g2}) C_o} \tag{235}$$

です．

[7] C_f の出力側への影響は，ここでは無視しています．出力ノードから C_f を通る電流は，$-i_1$ であり，

$$-i_1 = (v_2 - v_1) s C_f = v_2 (1 - 1/|A_M|) s C_f \tag{232}$$

ですから，出力ノードから $(1 - 1/|A_M|) C_f$ の容量によって接地されていると見なせます．したがって，C_o にこの容量を並列に付加して，第 2 のポールを計算したほうがよいでしょう．しかし，正確な高域の解析でわかるように，この部分にこだわってもあまり意味がないかもしれません．

8.7.1 数値例

V1 として 12AX7 を使い，$V_{bb} = 200\,\mathrm{V}$, $R_{p1} = 220\,\mathrm{k\Omega}$, $R_{k1} = 3.3\,\mathrm{k\Omega}$, $R_{g2} = 470\,\mathrm{k\Omega}$, $C_{k1} = 47\,\mu\mathrm{F}$, $C_{c1} = 0.1\,\mu\mathrm{F}$ とします．このとき，V1 の動作点は，$E_p = 115.9\,\mathrm{V}$, $E_g = -1.24\,\mathrm{V}$, $I_p = 0.38\,\mathrm{mA}$ であり，三定数は，$\mu = 95.6$, $r_p = 89.4\,\mathrm{k\Omega}$, $g_m = 1.07\,\mathrm{mS}$ です．12AX7 の電極間容量は，$C_{gk} = 1.6\,\mathrm{pF}$, $C_{gp} = 1.6\,\mathrm{pF}$, $C_{pk} = 0.33\,\mathrm{pF}$ です．

したがって，

$$
\begin{aligned}
R_2 &= r_p//R_{p1}//R_{g2} = (89.4//220//470)\times 10^3 = 56\times 10^3\,[\Omega] \\
|A_M| &= g_m R_2 = 1.07\times 10^{-3}\cdot 56\times 10^3 = 60 \\
C_t &= C_{gk} + (1+|A_M|)C_{gp} = [1.6 + (1+60)1.6]\times 10^{-12} = 99.2\,[\mathrm{pF}] \\
f_c &= \frac{1}{2\pi C_t R_s} = \frac{1}{2\pi\cdot 99.2\times 10^{-12}\cdot 25\times 10^3} = 64.3\times 10^3\,[\mathrm{Hz}]
\end{aligned}
$$

となります．

SPICE によるシミュレーションは，図 82のようになります．上側の等価回路 (グラフは緑) は正

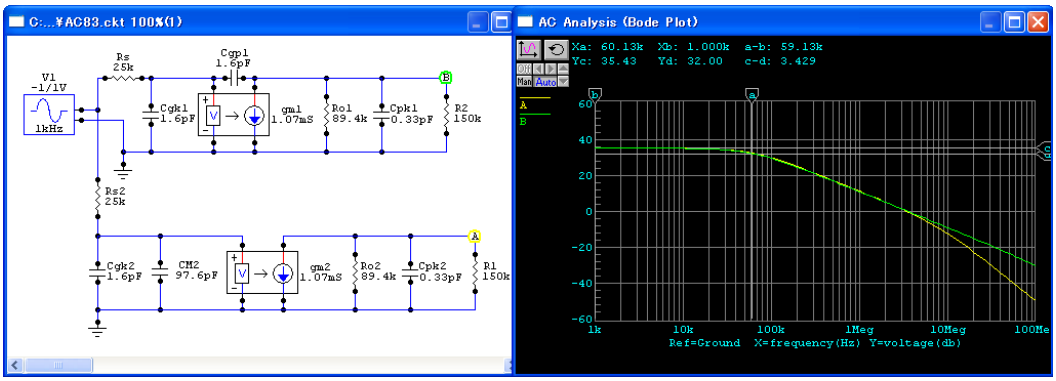

図 82: 高域特性のシミュレーション

確なもので，下側の等価回路 (グラフは黄) はミラー効果による近似です．黄色の線は 2 回折れ曲がり，ポールが 2 つあることを示しています．緑色の線は 1 回しか折れ曲がっていないように見えますが，実はたいへんなことが起きています．それは，次の正確な解析でわかります．

8.8 正確な高域の解析

高域の等価回路 (図 80(a)) において，A 点より左側を見たインピーダンスは，

$$
R_1 = (R_s + r_x)//r_{in} = \frac{(R_s + r_x)r_{in}}{R_s + r_x + r_{in}} \tag{236}
$$

で，短絡した電流は，

$$
i_i = \frac{v_0}{R_s + r_x} \tag{237}
$$

ですから，定電流源を使って (b) のように書き換えられます．ここで，

$$
C_1 = C_{in}
$$

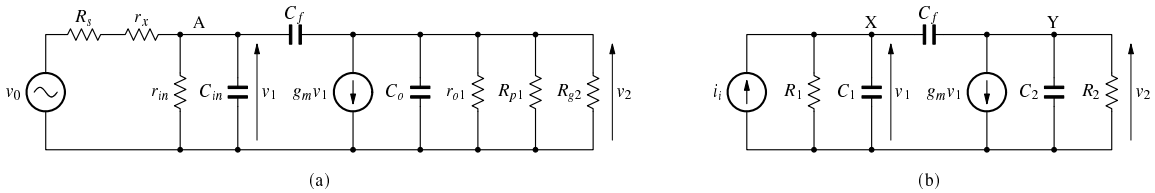

図 83: 高域の等価回路

$$
\begin{aligned}
C_2 &= C_o \\
R_2 &= r_o // R_{p1} // R_{g2}
\end{aligned}
$$

です.

ここで，点 X について，キルヒホッフの電流則を適用すると，

$$
\begin{aligned}
i_i &= \frac{v_1}{R_1} + v_1 sC_1 + (v_1 - v_2)sC_f && (238) \\
&= v_1\left(\frac{1}{R_1} + sC_1 + sC_f\right) - v_2 sC_f && (239)
\end{aligned}
$$

また，点 Y について，キルヒホッフの電流則を適用すると，

$$
\begin{aligned}
(v_1 - v_2)sC_f &= g_m v_1 + \frac{v_2}{R_2} + v_2 sC_2 && (240) \\
v_1(sC_f - g_m) &= v_2\left(\frac{1}{R_2} + sC_2 + sC_f\right) \\
v_1 &= -\frac{\frac{1}{R_2} + sC_2 + sC_f}{g_m - sC_f} v_2 && (241)
\end{aligned}
$$

これを，式 (239) に代入して，

$$
\begin{aligned}
i_i &= -v_2 \frac{\frac{1}{R_2} + sC_2 + sC_f}{g_m - sC_f}\left(\frac{1}{R_1} + sC_1 + sC_f\right) - v_2 sC_f \\
&= -v_2\left[\frac{(1 + sC_2R_2 + sC_fR_2)(1 + sC_1R_1 + sC_fR_1)}{R_1R_2(g_m - sC_f)} + sC_f\right] \\
&= -v_2 \frac{1 + s\{C_1R_1 + C_2R_2 + C_f(R_1 + R_2 + g_mR_1R_2)\} + s^2R_1R_2\{C_1C_2 + C_f(C_1 + C_2)\}}{R_1R_2(g_m - sC_f)} && (242)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
T(s) &= \frac{v_2}{v_0} = \frac{v_2}{i_i(R_s + r_x)} \\
&= -\frac{1}{R_s + r_x} \\
&\quad \times \frac{R_1R_2(g_m - sC_f)}{1 + s\{C_1R_1 + C_2R_2 + C_f(R_1 + R_2 + g_mR_1R_2)\} + s^2R_1R_2\{C_1C_2 + C_f(C_1 + C_2)\}} \\
&= -\frac{1}{R_s + r_x} \cdot \frac{(R_s + r_x)r_{in}}{R_s + r_x + r_{in}} g_m R_2 \\
&\quad \times \frac{1 - s\frac{C_f}{g_m}}{1 + s\{C_1R_1 + C_2R_2 + C_f(R_1 + R_2 + g_mR_1R_2)\} + s^2R_1R_2\{C_1C_2 + C_f(C_1 + C_2)\}} \\
&= -g_mR_2 \frac{r_{in}}{R_s + r_x + r_{in}} \\
&\quad \times \frac{1 - s\frac{C_f}{g_m}}{1 + s\{C_1R_1 + C_2R_2 + C_f(R_1 + R_2 + g_mR_1R_2)\} + s^2R_1R_2\{C_1C_2 + C_f(C_1 + C_2)\}} && (243)
\end{aligned}
$$

中域のゲインを A_M とおけば，

$$A_M = -g_m R_2 \frac{r_{in}}{R_s + r_x + r_{in}} \tag{244}$$

で，

$$\begin{aligned} T(s) &= A_M \frac{1 - s\frac{C_f}{g_m}}{1 + s\{C_1R_1 + C_2R_2 + C_f(R_1 + R_2 + g_mR_1R_2)\} + s^2R_1R_2\{C_1C_2 + C_f(C_1 + C_2)\}} \\ &= A_M T'(s) \end{aligned} \tag{245}$$

と書けます．$T'(s)$ の分母 $D'(s)$ は，$D'(s) = 0$ の解を p_1, p_2 とすれば，次のように表せます．

$$\begin{aligned} D'(s) &= \left(1 - \frac{s}{p_1}\right)\left(1 - \frac{s}{p_2}\right) \\ &= 1 - s\left(\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2}\right) + \frac{s^2}{p_1p_2} \end{aligned}$$

p_1 と p_2 が大きく離れている ($|p_1| \ll |p_2|$) ときは，次のように近似できます．

$$D'(s) \approx 1 - \frac{s}{p_1} + \frac{s^2}{p_1p_2} \tag{246}$$

これより，主要極 (dominant pole) p_1 は，

$$p_1 \approx -\frac{1}{C_1R_1 + C_2R_2 + C_f(R_1 + R_2 + g_mR_1R_2)} \tag{247}$$

と近似できます．この式と，ミラー効果による式 (234) を比較すると，C_2R_2 および C_fR_2 だけ異なっていることがわかります．さらに，$g_mR_2 \gg 1$ なので，

$$p_1 \approx -\frac{1}{g_mR_2R_1C_f} \tag{248}$$

と近似できます．また，第 2 のポール p_2 は，

$$\begin{aligned} p_1p_2 &= \frac{1}{R_1R_2\{C_1C_2 + C_f(C_1 + C_2)\}} \\ p_2 &\approx -\frac{g_mR_2R_1C_f}{R_1R_2\{C_1C_2 + C_f(C_1 + C_2)\}} \\ &\approx -\frac{g_m}{\frac{C_1C_2}{C_f} + C_1 + C_2} \end{aligned} \tag{249}$$

となります．

ここで，C_f を大きくしていくと，第 1 のポールは，低い方に移動し，第 2 のポールは，高い方に移動し，$C_f \to \infty$ のとき，$C_2 \to -g_m/(C_1 + C_2)$ となります．このように，C_f によって，2 つの極が離れる現象を**極分離** (pole split) といい，負帰還の位相補償に大いに役立ちます．また，$C_f \to 0$ のとき，

$$\begin{aligned} T'(s) &= \frac{1 - s\frac{C_f}{g_m}}{1 + s(C_1R_1 + C_2R_2) + s^2C_1C_2R_1R_2} \\ &= \frac{1 - s\frac{C_f}{g_m}}{(1 + sC_1R_1)(1 + sC_2R_2)} \end{aligned} \tag{250}$$

となるので，$p_1 \to -1/C_1R_1, p_2 \to -1/C_2R_2$ となります．

一方，伝達関数の分子にはゼロがありますが，その値は，

$$z = \frac{g_m}{C_f} \tag{251}$$

で，符号は正です．この周波数より上ではゲインが 6 dB/oct で上昇し，位相は通常のゼロとは逆に，遅れます．通常のゼロは負帰還を安定な方向に変化させますが，このゼロにより負帰還は不安定になります．このような実部が正のゼロを右半平面のゼロといいますが，これは，ゼロやポールを複素平面上にプロットしたときに，原点より右側にくるからです．

8.8.1 数値例

V1 として 12AX7 を使い，$V_{bb} = 200\,\mathrm{V}$, $R_{p1} = 220\,\mathrm{k\Omega}$, $R_{k1} = 3.3\,\mathrm{k\Omega}$, $R_{g2} = 470\,\mathrm{k\Omega}$, $C_{k1} = 47\,\mu\mathrm{F}$, $C_{c1} = 0.1\,\mu\mathrm{F}$ とします．このとき，V1 の動作点は，$E_p = 115.9\,\mathrm{V}$, $E_g = -1.24\,\mathrm{V}$, $I_p = 0.38\,\mathrm{mA}$ であり，三定数は，$\mu = 95.6$, $r_p = 89.4\,\mathrm{k\Omega}$, $g_m = 1.07\,\mathrm{mS}$ です．12AX7 の電極間容量は，$C_{gk} = 1.6\,\mathrm{pF}$, $C_{gp} = 1.6\,\mathrm{pF}$, $C_{pk} = 0.33\,\mathrm{pF}$ です．

したがって，

$$\begin{aligned}
R_1 &= (R_s + r_x)//r_{in} = 25 \times 10^3\,[\Omega] \\
R_2 &= r_p//R_{p1}//R_{g2} = (89.4//220//470) \times 10^3 = 56 \times 10^3\,[\Omega] \\
p_1 &= -\frac{1}{C_1R_1 + C_2R_2 + C_f(R_1 + R_2 + g_mR_1R_2)} \\
&= -\frac{1}{[1.6 \cdot 25 + 0.33 \cdot 56 + 1.6(25 + 56 + 1.07 \cdot 25 \cdot 56)] \times 10^{-9}} \\
&= -387000\,[\mathrm{rad/s}] = -61.6 \times 10^3\,[\mathrm{Hz}] \\
p_2 &= -\frac{g_m}{\frac{C_1C_2}{C_f} + C_1 + C_2} = -\frac{1.07 \times 10^{-3}}{[\frac{1.6 \cdot 0.33}{1.6} + 1.6 + 0.33] \times 10^{-12}} \\
&= -473 \times 10^6\,[\mathrm{rad/s}] = -75 \times 10^6\,[\mathrm{Hz}] \\
z &= \frac{g_m}{C_f} = \frac{1.07 \times 10^{-3}}{1.6 \times 10^{-12}} = 669 \times 10^6\,[\mathrm{rad/s}] = 106 \times 10^6\,[\mathrm{Hz}]
\end{aligned}$$

となります．

C_f を変化させたときのポールとゼロの変化を，図 84に示します．ポールは赤で，ゼロは青で示しています．C_f が電極間容量のみの場合の周波数特性を，図 85に示します．ポールとゼロの位置に縦線を引いてあります．位相は最大 270° 遅れます．真空管では g_m が低いので，C_f を増やすと p_2 よりも z の影響が先に現われるようになります．

C_o に次段の入力容量を含め 30 pF としたときのポールとゼロの変化を，図 86に示します．出力容量 (次段の入力容量) が増えた場合，p_2 が下がりますが，p_1 や z にはそれほど大きな変化がありません．多少は極分離の恩恵を受けることができます．

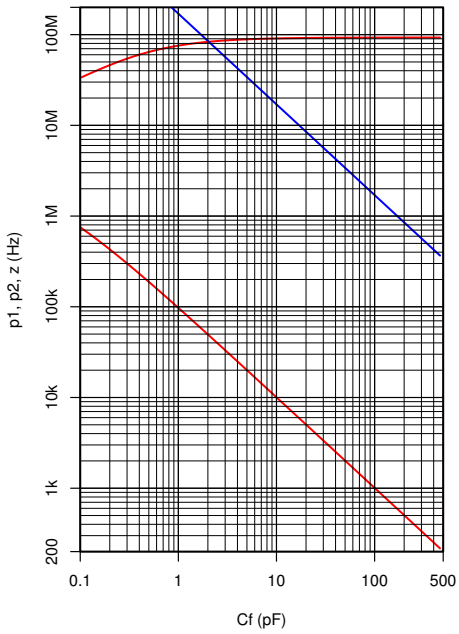

図 84: Cf を変化させたときのポールとゼロの変化 (12AX7)

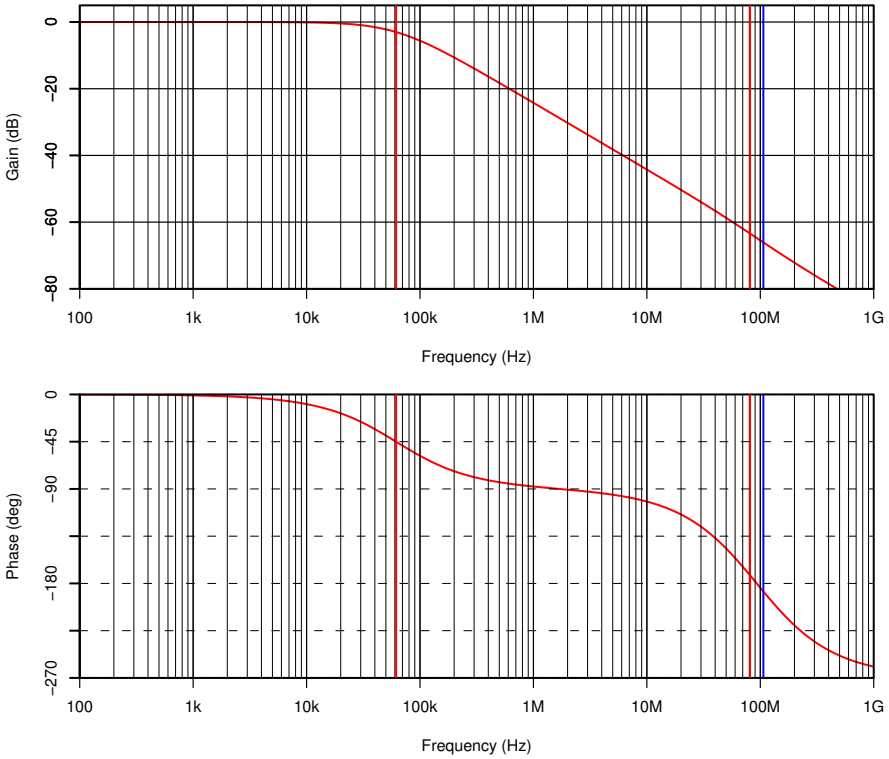

図 85: 周波数特性 (12AX7)

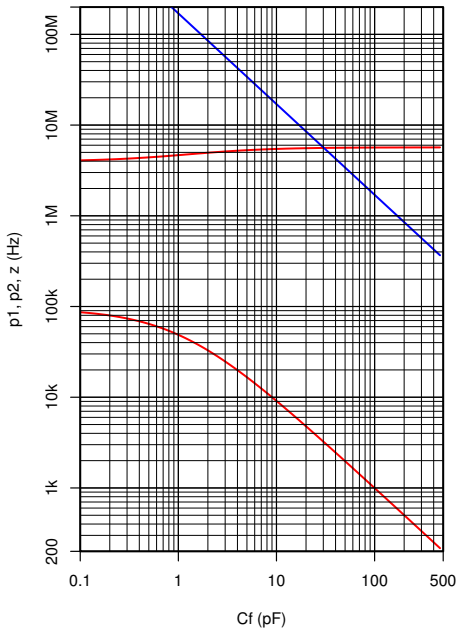

図 86: Cf を変化させたときのポールとゼロの変化 (12AX7, Co=30pF)

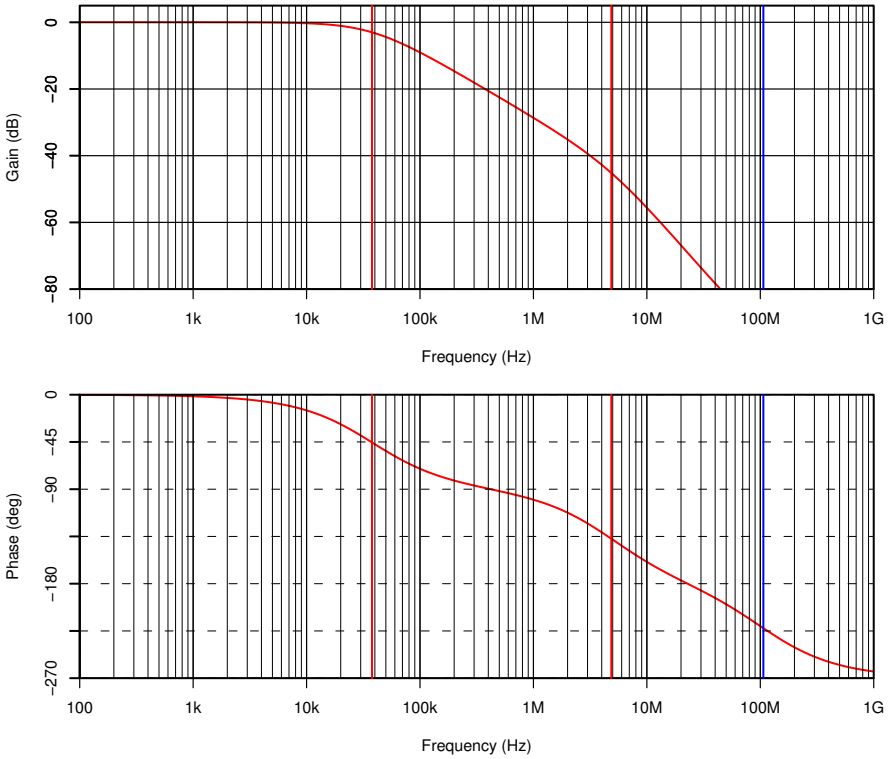

図 87: 周波数特性 (12AX7)

トランジスタの典型的な値では，例えば，$R_s = 100\,\mathrm{k\Omega}$, $r_x = 50\,\Omega$, $r_{in} = 4.6\,\mathrm{k\Omega}$, $g_m = 38.5\,\mathrm{mS}$, $r_o = 100\,\mathrm{k\Omega}$, $C_{in} = 47\,\mathrm{pF}$, $C_f = 2.6\,\mathrm{pF}$, $C_o = 0.8\,\mathrm{pF}$, $R_{c1} = 100\,\mathrm{k\Omega}$ とすれば，

$$
\begin{aligned}
R_1 &= (R_s + r_x)//r_{in} = (100\times10^3 + 50)//4.6\times10^3 = 4.4\times10^3\,[\Omega] \\
R_2 &= r_o//R_{c1} = 100\times10^3//100\times10^3 = 50\times10^3\,[\Omega] \\
p_1 &= -\frac{1}{C_1R_1 + C_2R_2 + C_f(R_1 + R_2 + g_mR_1R_2)} \\
&= -\frac{1}{[47\cdot4.4 + 0.8\cdot50 + 2.6(4.4 + 50 + 38.5\cdot4.4\cdot50)]\times10^{-9}} \\
&= -44600\,[\mathrm{rad/s}] = -7.1\,[\mathrm{kHz}] \\
p_2 &= -\frac{g_m}{\frac{C_1C_2}{C_f} + C_1 + C_2} = -\frac{38.5\times10^{-3}}{(\frac{47\cdot0.8}{2.6} + 47 + 0.8)\times10^{-12}} \\
&= -618\times10^6\,[\mathrm{rad/s}] = -98\times10^6\,[\mathrm{Hz}] \\
z &= \frac{g_m}{C_f} = \frac{38.5\times10^{-3}}{2.6\times10^{-12}} = 14.8\times10^9\,[\mathrm{rad/s}] = 2.4\times10^9\,[\mathrm{Hz}]
\end{aligned}
$$

となります．トランジスタの場合，g_m が非常に大きいので，ゼロは問題にならないほど大きくなります．

C_f を変化させたときのポールとゼロの変化を，図 88に示します．トランジスタの場合，g_m が大

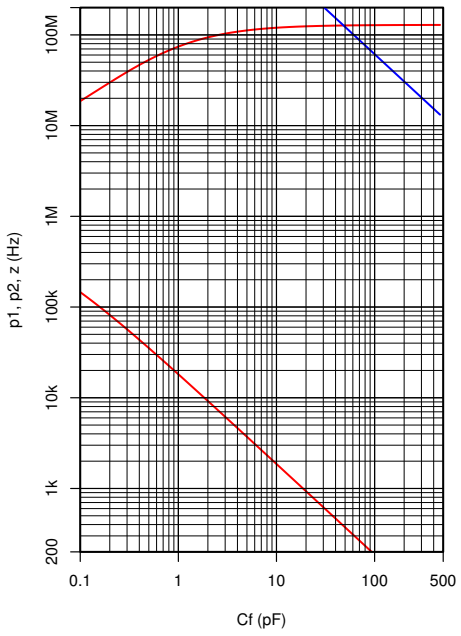

図 88: Cf を変化させたときのポールとゼロの変化 (BJT)

きいので，ゼロの存在はほとんど無視できます．

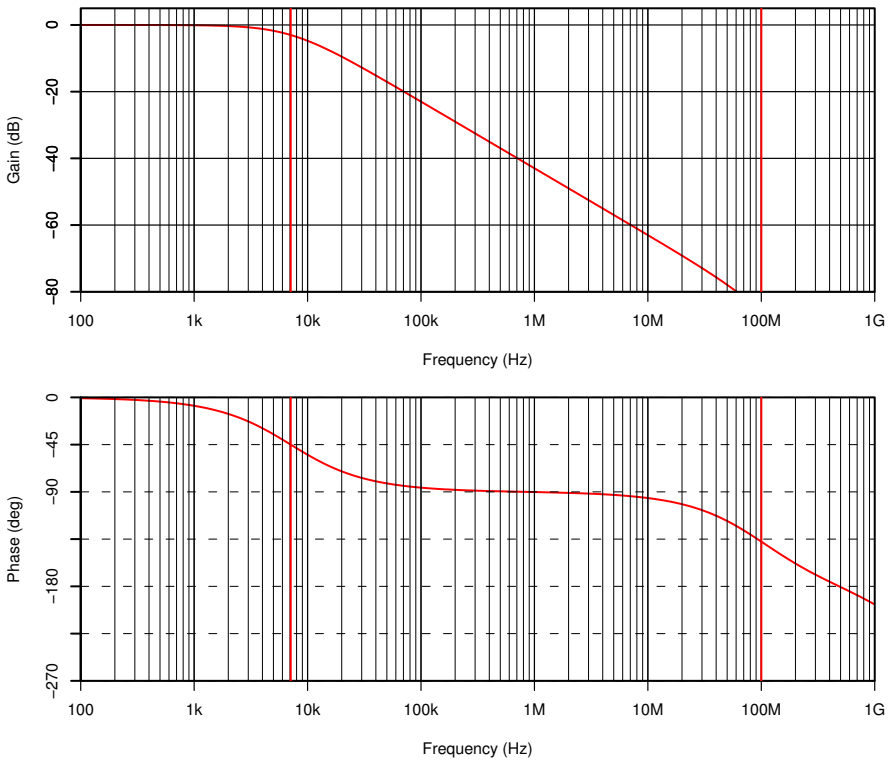

図 89: 周波数特性 (BJT)

8.8.2 何が起こっているのか?

グリッドの電圧 v_1 を見ることにより，なにが起こっているのか調べてみましょう．式 (241) より，

$$v_1 = -\frac{1}{g_m R_2} \cdot \frac{1 + s(C_2 + C_f)R_2}{1 - s\frac{C_f}{g_m}} v_2$$

これに式 (243) を代入して，

$$v_1 = \frac{r_{in}}{R_s + r_x + r_{in}} \cdot \frac{1 + s(C_2 + C_f)R_2}{1 + s[C_1R_1 + C_2R_2 + C_f(R_1 + R_2 + g_m R_1 R_2)] + s^2 R_1 R_2 [C_1 C_2 + C_f(C_1 + C_2)]} v_0$$

この式の第 2 項の分母の解を p_1, p_2 とおき，

$$\begin{aligned} z &= \frac{g_m}{C_f} \\ p_3 &= -\frac{1}{(C_2 + C_f)R_2} \end{aligned}$$

とおけば，

$$v_1 = \frac{r_{in}}{R_s + r_x + r_{in}} \cdot \frac{1 - s/p_3}{(1 - s/p_1)(1 - s/p_2)} v_0 \tag{252}$$

$$v_2 = -g_m R_2 \frac{1 - s/z}{1 - s/p_3} v_1 \tag{253}$$

となります．これより，各段のゲインは図 90のようになります．低域から $|p_1|$ までのゲインは平坦

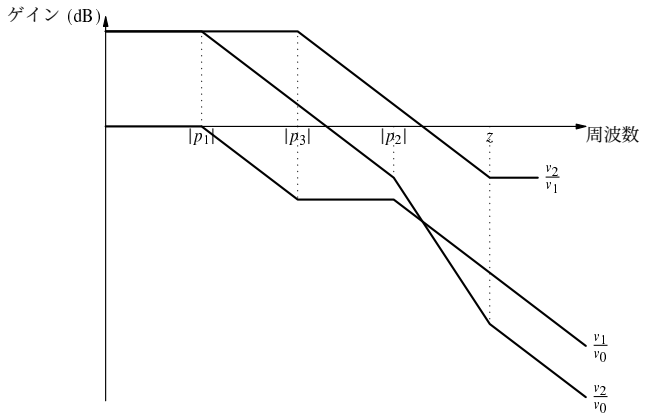

図 90: 高域の周波数特性

で，そこからミラー効果により高域が落ち始めます．それは，グリッドに並列にミラー容量が付加されるためです．さらに周波数が上がると，出力側の容量 $C_2 + C_f$ のインピーダンスが下がり，出力が減ってきます．この角周波数が $|p_3|$ です．こうなると，能動素子のゲインが減ってくるので，ミラー効果も減ってきて，グリッドにおける減衰が一定になります．これらの働きが合成されて，-6 dB/oct でゲインが下がり続けます．

角周波数 z では，能動素子による増幅 g_m と，C_f を左から右へと通り抜ける電流が同じになります．これ以上の周波数では，能動素子の働きは失われています．

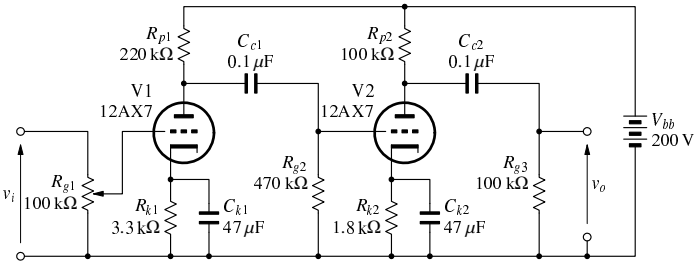

図 91: 2 段カソード接地電圧増幅回路

8.9 2 段アンプの特性

図 91の定数の，2 段のアンプの周波数特性を検討しましょう．

V1 の三定数は $\mu = 95.6$, $r_p = 89.4\,\mathrm{k\Omega}$, $g_m = 1.07\,\mathrm{mS}$ で，V2 の三定数は $\mu = 96.8$, $r_p = 73.2\,\mathrm{k\Omega}$, $g_m = 1.32\,\mathrm{mS}$ です．

等価回路は，図 92のようになります．ここで，

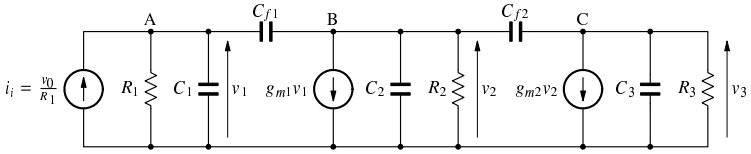

図 92: 2 段カソード接地電圧増幅回路の等価回路

$$
\begin{aligned}
v_0 &= \frac{v_i}{2} \\
R_1 &= \frac{R_{g1}}{4} \\
R_2 &= r_{p1}//R_{p1}//R_{g2} \\
R_3 &= r_{p2}//R_{p2}//R_{g3} \\
C_1 &= C_{gk1} \\
C_{f1} &= C_{gp1} \\
C_2 &= C_{pk1} + C_{gk2} \\
C_{f2} &= C_{gp2} \\
C_3 &= C_{pk2}
\end{aligned}
$$

です．点 A, B, C について，キルヒホッフの電流則を適用すると，

$$i_i = \frac{v_1}{R_1} + v_1 sC_1 + (v_1 - v_2)sC_{f1} \tag{254}$$

$$(v_1 - v_2)sC_{f1} = g_{m1}v_1 + \frac{v_2}{R_2} + v_2 sC_2 + (v_2 - v_3)sC_{f2} \tag{255}$$

$$(v_2 - v_3)sC_{f2} = g_{m2}v_2 + \frac{v_3}{R_3} + v_3 sC_3 \tag{256}$$

が得られ，v_0 から v_3 への伝達関数 $T(s)$ を求めると，

$$T(s) = g_{m1}R_2 g_{m2}R_3 \frac{(1 - s\frac{C_{f1}}{g_{m1}})(1 - s\frac{C_{f2}}{g_{m2}})}{1 + a_1 s + a_2 s^2 + a_3 s^3} \tag{257}$$

となります．ここで，

$$a_1 = C_1R_1 + C_2R_2 + C_3R_3 + C_{f1}[R_2 + R_1(1 + g_{m1}R_2)] + C_{f2}[R_3 + R_2(1 + g_{m2}R_3)] \tag{258}$$

$$\begin{aligned} a_2 = {} & C_1C_2R_1R_2 + C_1C_3R_1R_3 + C_2C_3R_2R_3 + C_{f1}(C_1 + C_2)R_1R_2 + C_{f2}(C_2 + C_3)R_2R_3 \\ & + C_1C_{f2}R_1[R_3 + R_2(1 + g_{m2}R_3)] + C_3C_{f1}R_3[R_2 + R_1(1 + g_{m1}R_2)] \\ & + C_{f1}C_{f2}[R_1R_2(1 + g_{m2}R_3) + R_1R_3(1 + g_{m1}R_2)] \end{aligned} \tag{259}$$

$$\begin{aligned} a_3 = {} & R_1R_2R_3[C_1C_2(C_3 + C_{f2}) + C_1C_3(C_{f1} + C_{f2}) \\ & + C_1C_{f1}C_{f2} + C_2C_3C_{f1} + C_{f1}C_{f2}(C_2 + C_3)] \end{aligned} \tag{260}$$

です．分母多項式 $D(s)$ は，その根 p_1, p_2, p_3 により因数分解できて，

$$\begin{aligned} D(s) &= (1 - s/p_1)(1 - s/p_2)(1 - s/p_3) \\ &= 1 - s\Big(\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_2}\Big) + s^2\Big(\frac{1}{p_1p_2} + \frac{1}{p_2p_3} + \frac{1}{p_1p_3}\Big) - \frac{s^3}{p_1p_2p_3} \end{aligned}$$

であり，$|p_1| \ll |p_2| \ll |p_3|$ なら，

$$D(s) \approx 1 - \frac{s}{p_1} + \frac{s^2}{p_1p_2} - \frac{s^3}{p_1p_2p_3}$$

と近似できます．これより，

$$p_1 \approx -\frac{1}{a_1} = -\frac{1}{C_{f1}R_1g_{m1}R_2 + C_{f2}R_2g_{m2}R_3} \tag{261}$$

$$p_2 \approx -\frac{a_1}{a_2} = -\frac{C_{f1}R_1g_{m1}R_2 + C_{f2}R_2g_{m2}R_3}{C_{f1}(C_3 + C_{f2})R_1R_3g_{m1}R_2 + C_{f2}(C_1 + C_{f1})R_1R_2g_{m2}R_3} \tag{262}$$

$$p_3 \approx -\frac{a_2}{a_3} \tag{263}$$

となり，最初の 2 つのポールの見当をつけることができます．

各段の伝達特性を求めると，

$$\frac{v_1}{v_0} = \frac{(1 - s/p_4)(1 - s/p_5)}{(1 - s/p_1)(1 - s/p_2)(1 - s/p_3)} \tag{264}$$

$$\frac{v_2}{v_1} = -g_{m1}R_2\frac{(1 - s/z_1)(1 - s/p_6)}{(1 - s/p_4)(1 - s/p_5)} \tag{265}$$

$$\frac{v_3}{v_2} = -g_{m2}R_3\frac{1 - s/z_2}{1 - s/p_6} \tag{266}$$

で，p_1, p_2, p_3 は，$D(s)$ の根，

$$z_1 = \frac{g_{m1}}{C_{f1}} \tag{267}$$

$$z_2 = \frac{g_{m2}}{C_{f2}} \tag{268}$$

$$p_6 = -\frac{1}{(C_3 + C_{f2})R_3} \tag{269}$$

で，p_4, p_5 は，

$$1 + s\{C_2R_2 + C_3R_3 + C_{f1}R_2 + C_{f2}[R_3 + R_2(1 + g_{m2}R_3)]\} + s^2R_2R_3[C_2(C_3 + C_{f2}) + C_3(C_{f1} + C_{f2}) + C_{f1}C_{f2}] = 0$$

の解で，近似値を求めれば，

$$p_4 \approx -\frac{1}{C_{f2}R_2 g_{m2} R_3} \tag{270}$$

$$p_5 \approx -\frac{g_{m2}R_3}{R_3[(C_{f1}+C_2)(1+\frac{C_3}{C_{f2}})+C_3]} \tag{271}$$

となります．

周波数特性は，図 93のようになります．V2 のゲイン (A23) が下がってくると，V2 のミラー効

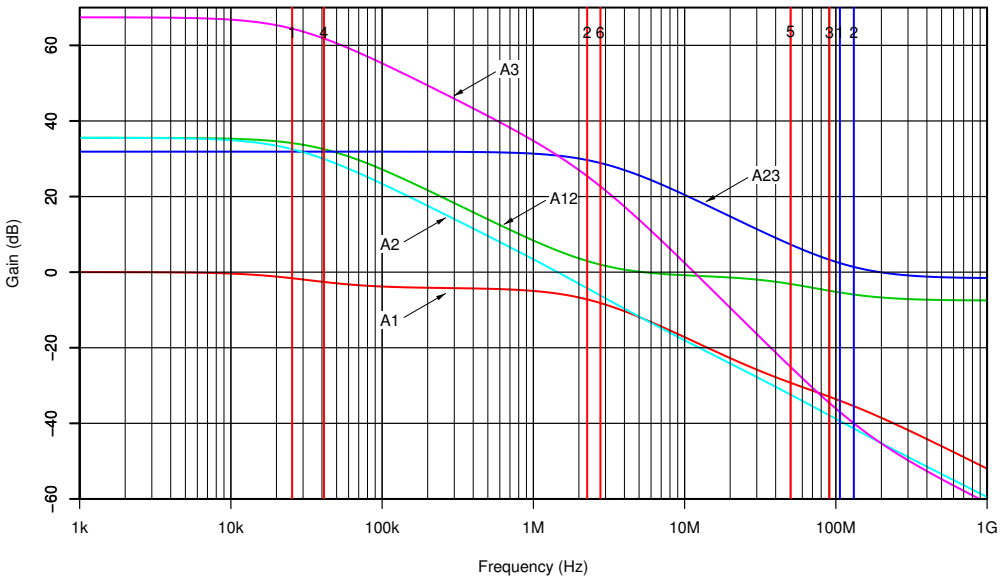

図 93: 2 段アンプの周波数特性

果が減ってきて，前段のゲイン (A12) にゼロが生じ，ゲインが一定となります．同様に，V1 のゲイン (A12) が下がってくると，V1 のミラー効果が減ってきて，V1 のグリッドまでのゲイン (A1) にゼロが生じます．入力から V1 の出力までの特性は A2 で，第 1 のポールからゲインが直線的に下がっています．これに V2 のゲイン (A23) が加わるので，全体のゲイン (A3) には 2 箇所の折れ曲がり ($|p_1|, |p_2|$) が生じます．

この程度の規模になると，計算で特性を求めるよりシミュレーションを使ったほうが手軽でしょう．回路と結果は，図 94のようになります．

V1, V2 の単体の周波数特性を表示するには，Ctrl を押しながら，マウスでクリックすることにより基準点 (Ref と表示されている) を設定できます．残念ながら基準点は 1 箇所しか設定できませんので，V1 と V2 それぞれで表示させなくてはなりません．V1 の周波数特性を図 95に，V2 の周波数特性を図 96に示します．

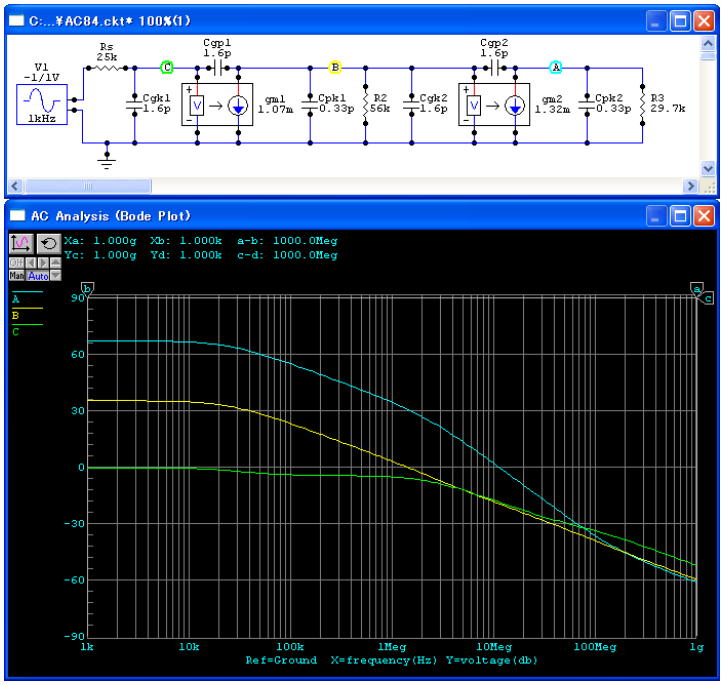

図 94: 2 段アンプのシミュレーション

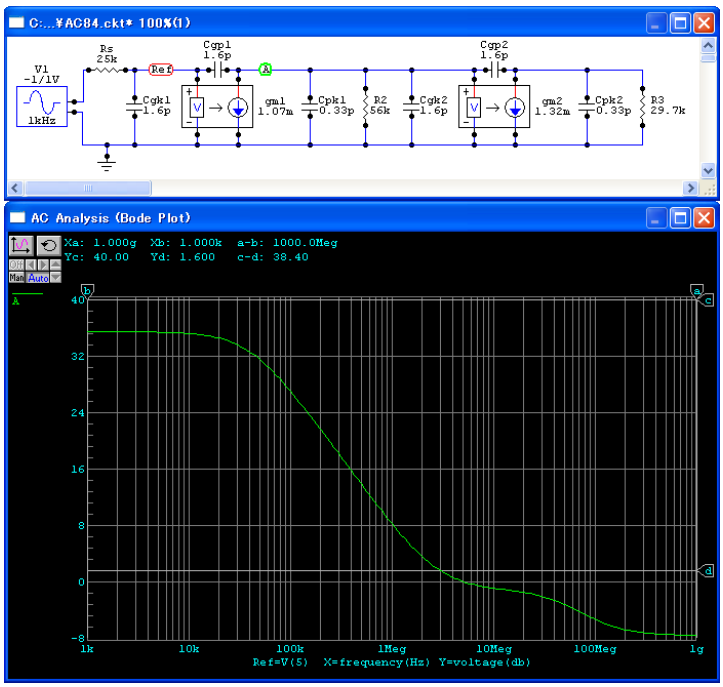

図 95: V1 の周波数特性

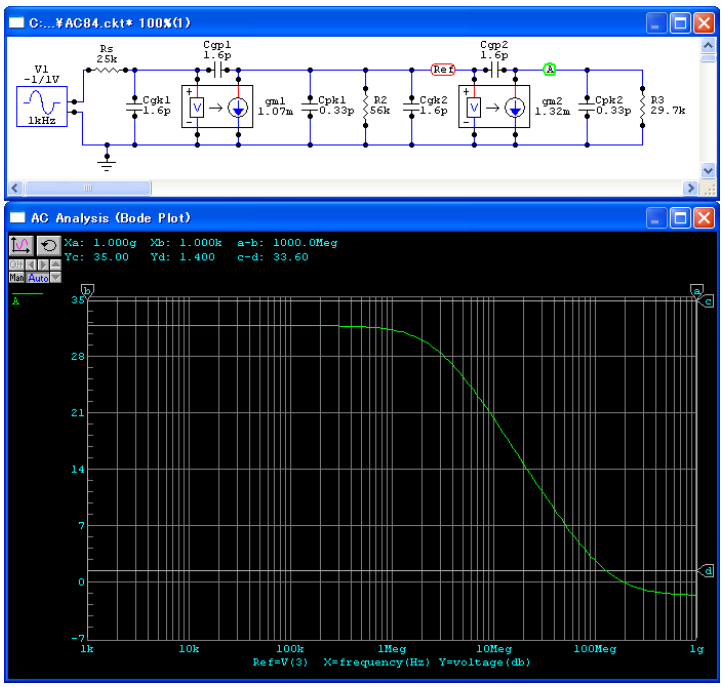

図 96: V2 の周波数特性

9 負帰還

負帰還とは，図 97のように，アンプの出力を β 倍 (通常は $\beta \leq 1$) し，それを入力から差し引くものです.

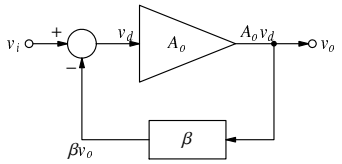

図 97: 負帰還

実質的なアンプの入力信号 v_d は,

$$v_d = v_i - \beta v_o \tag{272}$$

で，これが A_o 倍されたものが出力 v_o となります.

$$v_o = A_o v_d \tag{273}$$

これから v_d を消去すれば，負帰還回路の入出力の関係，すなわち伝達関数が求められます.

$$\begin{aligned} v_o &= A_o(v_i - \beta v_o) \\ (1 + A_o\beta)v_o &= A_o v_i \\ v_o &= \frac{A_o}{1 + A_o\beta} v_i \end{aligned} \tag{274}$$

$$A_f(s) = \frac{v_o}{v_i} = \frac{A_o(s)}{1 + A_o(s)\beta(s)} \tag{275}$$

負帰還をかけた後のゲイン $A_f(s)$ は，**クローズドループゲイン** (closed loop gain) といいます．負帰還をかける前のゲイン $A_o(s)$ は，**オープンループゲイン** (open loop gain) といいます．帰還前と帰還後のゲインの比率は**帰還量** (feedback) F で,

$$F = \frac{A_o}{A_f} = 1 + A_o\beta \tag{276}$$

です.

一般には帰還回路 (β 回路ともいう) は受動素子，特に抵抗を使って構成する場合が多く，β に周波数特性がない場合が多いのですが，ここでは $\beta(s)$ として，周波数特性がある場合も考えます.

また，この図では，アンプは出力から入力に信号を伝えない，また β 回路は左側から右側に信号を伝えないことが仮定されていますが，そのような仮定が成り立たない場合には，漸近利得という概念を使って解析します．オーディオにおいては，通常は上述の仮定が成り立っていますので，漸近利得による解析は，ここでは扱いません．興味のある方は，[2], [1] などを参照してください.

式 (275) より，$A_o\beta$ が十分大きければ,

$$A_f(s) = \frac{A_0}{1 + A_0\beta} = \frac{1}{\frac{1}{A_o} + \beta} = \frac{1}{\beta} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{A_0\beta}} \approx \frac{1}{\beta} \tag{277}$$

と近似できますので，アンプのゲインや周波数特性は，帰還後の特性にほとんど影響を与えず，β 回路の特性によって決まることが分かります.

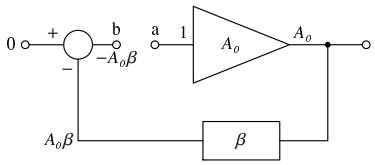

図 98: ループゲイン

ここで，図 98のように，アンプの入力のところで回路を切ります．入力に信号を与えず，点 a に単位信号 (たとえば 1 V) を与えます．このとき，点 b に現れた信号の負の値を**ループゲイン** (loop gain) といい，$T(s)$ で表します．図より，

$$T(s) = A_o\beta \tag{278}$$

となることは明らかです．ループゲインは，負帰還回路の安定性を調べるときに大変重要で，ループゲインが −1 (絶対値が 1 倍かつ位相が 180° 進むか遅れる) になると，点 b には点 a と同じ信号が現れるので，ループを閉じれば入力 v_i がなくても出力が生じる，つまり発振してしまいます．

点 b からみた点 a の信号の大きさ，すなわち点 a と点 b の信号の差は，**還送差**といい，

$$1 - (-A_o\beta) = 1 + A_o\beta = F \tag{279}$$

となり，先ほど示した帰還量と同じです．ループゲインの定義でみたように，アンプの入力には 1 単位の信号を加えています．その結果，点 b には $-A_o\beta$ の信号が生じており，それを打ち消して，さらに点 a に 1 単位の信号が生じるような入力を加えてやれば，アンプの出力は帰還前の出力と同じになります．そのときの入力は，$F = 1 + A_o\beta$ で，それだけアンプの入力感度が低くなっているわけで，還送差は帰還量と一致することになります．

ループゲインは，負帰還のループのどこで切断しても求められます．一般には，切断した影響が少なくなるよう，(b 点の) 出力インピーダンスが低く，(a 点の) 入力インピーダンスが高くなる点を選びます．パワーアンプであれば，アンプの出力と β 回路の入力の間で切断するのがよいでしょう．DC アンプなど，負帰還がないと動作点が定まらないような場合は，インダクタなどを入れて，直流には負帰還がかかり，交流信号には負帰還がかからないような措置を施す必要があります．切断する適切な箇所がアンプ内にある場合もあります．

今まで出てきた用語と式をまとめると，次のようになります．

オープンループゲイン	A_o
帰還率	β
ループゲイン	$T = A_o\beta$
クローズドループゲイン	$A_f = \frac{A_o}{1+A_o\beta} = \frac{A_o}{1+T} = \frac{A_o}{F}$
帰還量，還送差	$F = 1 + A_o\beta = 1 + T$

9.1 負帰還の安定性とボーデ線図

負帰還の安定性を検討するために，ナイキスト線図やニコルス線図などを使うこともありますが，一番多く使われるのが，**ボーデ線図** (Bode chart) です．ボーデ線図は，横軸に周波数をとり，縦軸には，ゲインをデシベルで表したものと位相をとったものです (図 99).

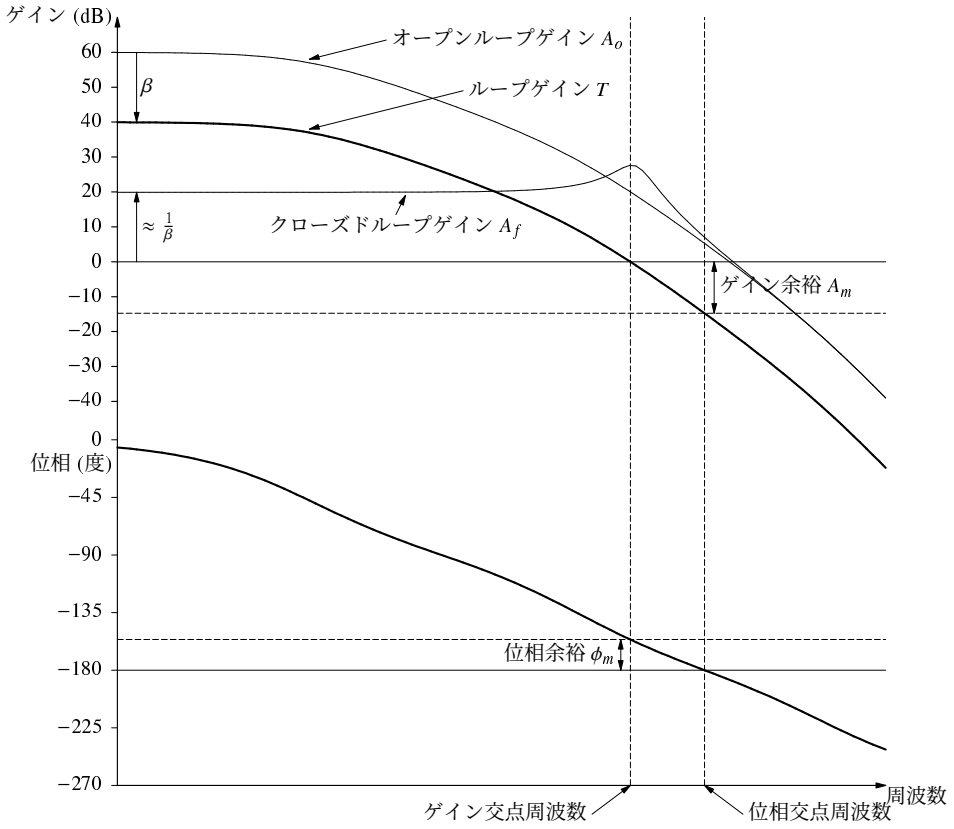
ゲイン (dB)
60
50
40
30
20
10
0
−10
−20
−30
−40
0
位相 (度)
−45
−90
−135
−180
−225
−270
オープンループゲイン A_o
ループゲイン T
β
$\approx \frac{1}{\beta}$
クローズドループゲイン A_f
ゲイン余裕 A_m
位相余裕 ϕ_m
周波数
ゲイン交点周波数
位相交点周波数

図 99: ボーデ線図

負帰還の安定性を検討するには，ループゲインのボーデ線図を描きます．ボーデ線図上で，ループゲインが 0 dB になるまでに，位相が ±180° 以下であれば，安定です．また別の言い方をすれば，位相が ±180° に達するまでに，ループゲインが 0 dB 以下になっていれば，安定です．ただし，安定といっても発振しないというだけで，周波数特性にピークができることはあります．

負帰還をかけたときにどの程度安定かを判断するために，**位相余裕** (phase margin) や**ゲイン余裕** (gain margin) というものが使われます．位相余裕は，ループゲインが 0 dB となったときの，ループゲインの位相と ±180° との差です．ゲイン余裕は，ループゲインの位相が ±180° になったときの，ループゲインと 0 dB との差です．

9.2 時定数が 1 段の回路に負帰還をかける

アンプのオープンループゲインとして，低域のゲインが A_0 で，ポールが p のローパス特性を考えます．伝達関数は，

$$A_o(s) = \frac{A_0}{1 - \frac{s}{p}} \tag{280}$$

です．周波数特性がフラットな β 回路で負帰還をかけると，クローズドループ特性は，

$$\begin{aligned} A_f(s) &= \frac{A_o(s)}{1 + A_o(s)\beta} \\ &= \frac{\frac{A_0}{1-s/p}}{1 + \frac{A_0}{1-s/p}\beta} \\ &= \frac{A_0}{1 - s/p + A_0\beta} \\ &= \frac{A_0}{1 + A_0\beta - s/p} \\ &= \frac{A_0}{1 + A_0\beta} \cdot \frac{1}{1 - \frac{s}{p(1+A_0\beta)}} \end{aligned} \tag{281}$$

となります．この式の第 1 項は，s を含まない部分であり，帰還後の低域のゲインが $A_f(0) = A_0/(1 + A_0\beta)$ となることがわかります．この式の第 2 項は，1 次のローパス特性であり，そのポール p' は，

$$p' = (1 + A_0\beta)p = F_0 p \tag{282}$$

です．ここで，F_0 は低域の帰還量で $F_0 = 1 + A_0\beta$ です．つまり，負帰還により，高域のポールが，低域の帰還量だけ高いほうに移動することがわかります．

9.2.1 数値例

低域のゲインが 100 で，10 kHz にポールを持つ回路に 20 dB の負帰還をかけた場合の特性を求めます．

$$\begin{aligned} A_0 &= 100 \\ p &= -2\pi \cdot 10 \times 10^3 \\ A_o(s) &= \frac{A_0}{1 - s/p} = \frac{100}{1 + \frac{s}{2\pi \cdot 10 \times 10^3}} \\ F &= 10 \end{aligned}$$

これより，

$$\beta = \frac{F-1}{A_0} = \frac{10-1}{100} = 0.09$$

となります．

R の関数は，次のようになります．

```
function ()
{
    A0 <- 100                   # 低域のオープンループゲイン
    p <- -2 * pi * 10e3         # ポール (10kHz)
    F <- 10                     # 帰還量
    b <- (F - 1) / A0           # 帰還率

    f <- dec(1e3, 1e6, 30)
    s <- 2 * pi * f * (0+1i)
    Ao <- A0 / (1 - s/p)        # 各周波数のオープンループゲイン
    Af <- Ao / (1 + Ao * b)     # クローズドループゲイン

    y <- cbind(Ao, Af)
    x <- list(f=f, A=y, arg=Arg(y)*180/pi)
    par(mfrow=c(2, 1))
    col <- c("red", "blue")
    bode.gain(x, lty=1, col=col, ylim=c(0, 45), yaxs="i")
    abline(v=log10(-p/2/pi), col="red")         # 帰還前のカットオフ周波数
    abline(v=log10(-p/2/pi*F), col="blue")      # 帰還後のカットオフ周波数
    bode.phase(x, lty=1, col=col, ylim=c(-90, 0), yaxs="i")
}
```

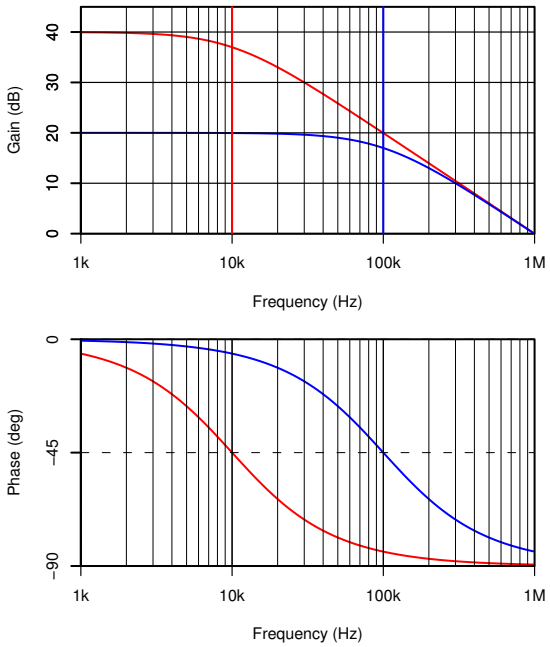

図 100: 時定数が 1 段の回路に負帰還をかけた特性

9.3 位相余裕と帰還後の周波数特性

前節のように，時定数が 1 段しかない場合，位相は最大でも 90° しか変化せず，負帰還をかけた後の特性もポールが一つしかなく，ピークは生じません．

ところで，負帰還アンプの各部の電圧をベクトル図で表してみましょう．アンプ自体の実質的な入力 v_d を基準にすると，図 101のようになります．負帰還をかけない場合のアンプ自体の位相の遅

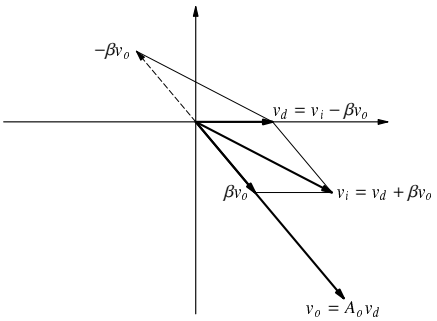

図 101: 負帰還のベクトル図

れは，x 軸と v_o のなす角です．負帰還をかけた場合，位相の遅れは，v_i と v_o のなす角となり，帰還前よりも小さくなります．v_d を 1 とすれば $v_o = A_o$ で，v_i は $1 + A_o\beta$ となることも，この図からわかります．

ループゲインの定義より，ループゲインは $v_d = 1$ を与えたときの，$\beta v_o = \beta A_o$ になります．ゲイン交点周波数では，ループゲインの絶対値が 1 になりますが，これは βA_o の絶対値が 1 になることを意味しています．また βA_o と x 軸の負方向とでなす角が位相余裕 ϕ_m になります．位相余裕が 60° のときのベクトル図を図 102に示します．位相余裕が 60° の場合，v_i の絶対値も 1 になります．

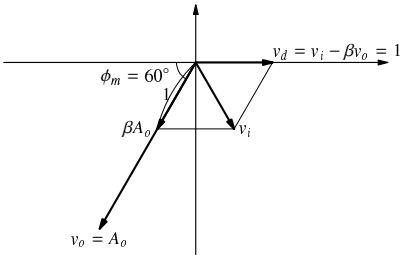

図 102: 位相余裕が 60 度の場合

すなわち同じ $v_o = A_o$ という出力に対して，帰還前の入力 v_d も帰還後の入力 v_i も絶対値が等しいので，ゲインは帰還前と帰還後とで変わりません．ただし位相の遅れは帰還後のほうが小さくなります．

位相余裕が 45° の場合を図 103に示します．この場合，帰還後の入力 v_i の絶対値が 1 より小さくなっているので，ゲインは帰還前よりも大きくなっています．このように，位相余裕が 60° よりも小さくなると，ゲイン交点周波数では，帰還後のほうがゲインが大きくなります．ゲインが帰還前よりも大きくなっているので，正帰還になっているともいえます．

位相余裕が 90° の場合を図 104に示します．この場合，帰還後の入力 v_i の絶対値は $\sqrt{2} \approx 1.41$ で，ゲインは帰還前の 1/1.41 ≈ 0.7 倍となります．

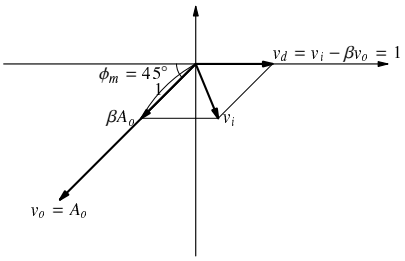

図 103: 位相余裕が 45 度の場合

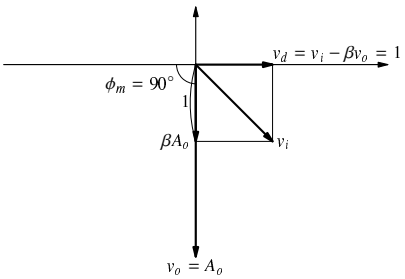

図 104: 位相余裕が 90 度の場合

ここまではゲイン交点における負帰還アンプの振る舞いを調べてきましたが，位相余裕を 60° 以上とっておけば，それほど大きなピークが生じないであろうことがわかります．ゲイン交点周波数以外でどのような特性になるかを一般的に論じるのは困難なので，いくつか仮定を置くことにします．位相余裕が 90° より小さくなるということは，位相の遅れが 90° 以上になるということで，少なくとも 2 つのポールが存在しなくてはなりません．2 つのポールが近くにあるという状況は一般的に表せないので，2 つのポールが離れていると仮定します．また，浅い負帰還では負帰還の問題が現れにくいので，低域のループゲインが非常に大きいと仮定します．この仮定にもとづいて，一方のポールは積分回路によって生じるとします．ここでは，ある基準周波数 ω_0 でゲインの絶対値が 1 で，周波数が低くなるにつれて +6 dB/oct でゲインが上昇し続ける積分回路と，通常の RC によるローパス特性を組み合わせて，ω_0 においてオープンループゲインの絶対値が 1 となり，その時の位相余裕が希望の値になるような回路を考えます．この回路に $\beta = 1$ の全帰還をかけた場合のゲインを求めます．全帰還をかけた場合の低域のゲインは 1 です．

積分回路の伝達関数 A_1 は，

$$A_1 = \frac{1}{\frac{s}{\omega_0}} \tag{283}$$

で，位相は常に 90° 遅れます．

位相余裕が ϕ_m の場合，第 2 のポールによる位相の遅れ ϕ_2 は，

$$\overbrace{-180 + \phi_m}^{\text{トータルの位相の遅れ}} = \overbrace{-90}^{\text{積分回路による位相の遅れ}} + \phi_2$$

より，

$$\phi_2 = -90 + \phi_m \tag{284}$$

となります．

第 2 のポールの伝達関数 A_2 を

$$A_2 = A_{20} \frac{1}{1 - \frac{s}{\omega_0 p_2}} \tag{285}$$

とおけば，ゲインは，

$$|A_2| = A_{20} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\omega^2}{\omega_0^2 p_2^2}}} \tag{286}$$

位相は，

$$\arg A_2 = \tan^{-1} \frac{\omega}{\omega_0 p_2} \tag{287}$$

で，$\omega = \omega_0$ のゲインが 1，位相が ϕ_2 となる A_{20}, p_2 を求めればよいことになります．

$$p_2 = \frac{1}{\tan \phi_2} \tag{288}$$

$$A_{20} = \sqrt{1 + \frac{1}{p_2^2}} \tag{289}$$

さまざまな位相余裕について，A_{20}, p_2 を求めると，以下のようになります．

ϕ_m (°)	p_2	A_{20}
90	$-\infty$	1
60	-1.732	1.1547
45	-1	1.414
30	-0.5774	2
20	-0.3640	2.9238

それぞれの周波数特性は，図 105のようになります．位相余裕が 60° の場合，ゲイン交点周波数で

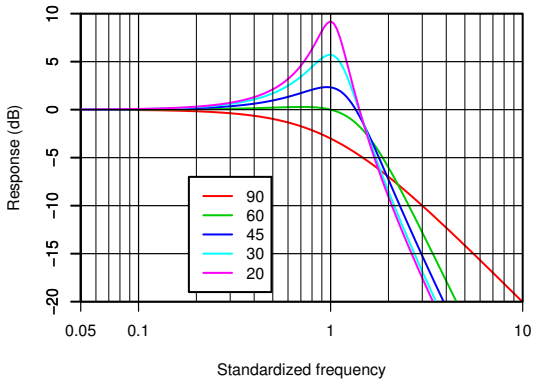

図 105: 位相余裕と周波数特性

はゲインが 1 になっていますが，それより低い周波数ではゲインが 1 を上回っています．完全にピークをなくすには，位相余裕を 65° ほど取らねばなりません．

シミュレーションの回路と結果は，図 106のようになります．積分器のゲインを 6.2832 に設定して，1 Hz でゲインが 1 となるようにしています．積分器の出力インピーダンスは 0 なので，その後ろに RC によるローパスフィルタを直接接続し，さらにゲインを持たせたバッファを接続して出力としています．負帰還は，積分器が差動入力となっているので，そのマイナス端子に出力を戻しています．

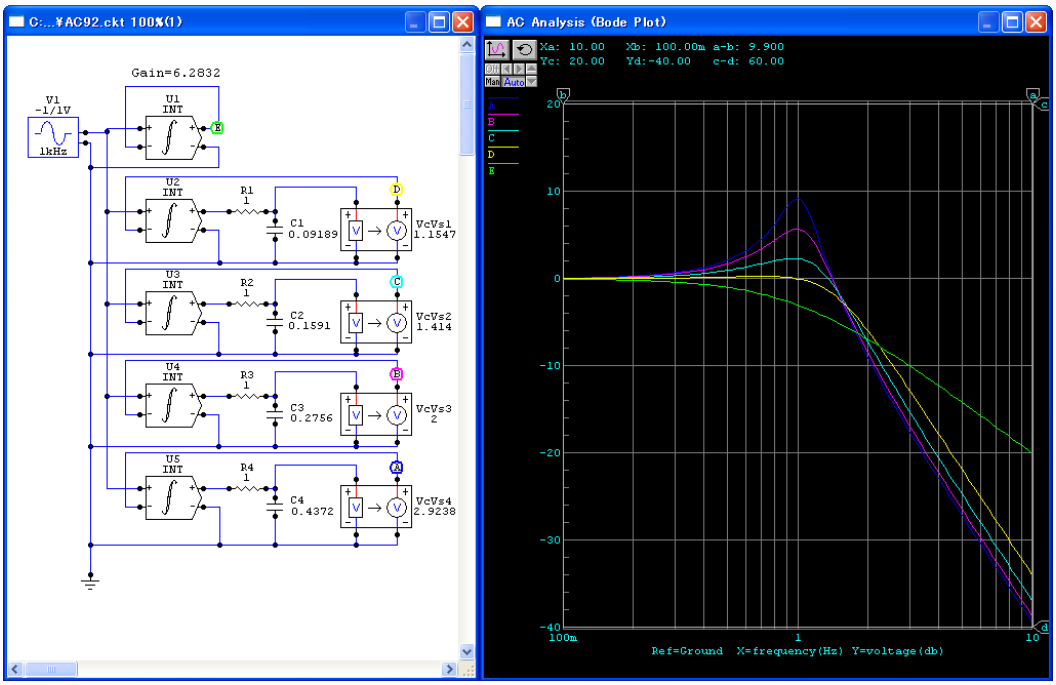

図 106: 位相余裕のシミュレーション

9.4 時定数が 2 段の回路に負帰還をかける

9.4.1 2 次伝達関数の特性

まず，2 個の極を持つ伝達関数の特性を調べます．一般に，このような伝達関数 $H(s)$ は，

$$H(s) = \frac{1}{\frac{s^2}{\omega_0^2} + \frac{s}{Q\omega_0} + 1} \tag{290}$$

のように表せます．ω_0 は $Q = \infty$ のときに，インパルスを与えると自然に発生する振動の固有周波数です．Q は $s = j\omega_0$ のときのゲインです．

ゲインの周波数特性　ゲインは，s に $j\omega$ を代入して絶対値をとることにより求められ，

$$|H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2})^2 + \frac{\omega^2}{Q^2\omega_0^2}}} \tag{291}$$

となります．Q を変えたときの，ゲインの周波数特性の変化は，図 107のようになります．

$Q < 1/\sqrt{2}$ のとき，ゲインの特性にピークは見られません．$Q = 1/\sqrt{2}$ のとき，最大平坦振幅特性が得られ，これは 2 次のバタワース特性と呼ばれます．$Q > 1/\sqrt{2}$ のとき，周波数特性にピークが生じますが，このピークの周波数 ω_p を求めてみます．式 (291) をさらに変形すると，

$$\begin{aligned} |H(j\omega)| &= \frac{1}{\sqrt{(\omega/\omega_0)^4 - 2(\omega/\omega_0)^2 + 1 + (\omega/\omega_0)^2/Q^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{[(\omega/\omega_0)^2 - (1 - 1/2Q^2)]^2 + 1 - (1 - 1/2Q^2)^2}} \end{aligned} \tag{292}$$

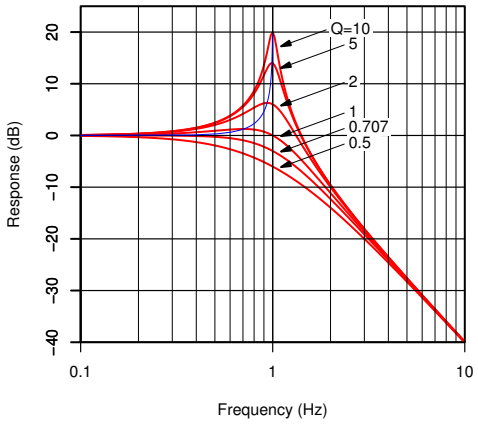

図 107: 2 次の伝達関数の周波数特性

となりますので，ピークを生じる周波数は，

$$\frac{\omega_p}{\omega_0} = \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}} \tag{293}$$

ピークの大きさ A_p は，

$$A_p = \frac{1}{\sqrt{1-(1-1/2Q^2)^2}} = \frac{2Q^2}{\sqrt{4Q^2-1}} \tag{294}$$

となります．ピークの大きさに対する Q の値の例を，以下に示します．

ピーク (dB)	Q
0	0.707
0.5	0.864
1	0.957
2	1.129
3	1.305
6	1.927
10	3.12
20	9.99

またグラフで表すと，図 108のようになります．

ステップ応答　伝達関数 (290) は，$Q > 1/2$ のとき複素数の極を持ちます．このとき，

$$b = \frac{\omega_0}{2Q} \tag{295}$$

$$a = \frac{\omega_0\sqrt{4Q^2-1}}{2Q} \tag{296}$$

とおけば，伝達関数を次のように書くことができ，

$$H(s) = \frac{\omega_0^2}{(s+b)^2+a^2} \tag{297}$$

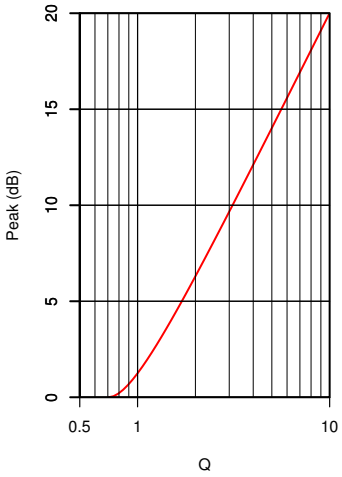

図 108: Q とピークの大きさの関係

この関数のインディシャルレスポンス (ステップ応答) は，$H(s)/s$ をラプラス逆変換[8]して求めることができます．

$$\frac{H(s)}{s} = \frac{\omega_0^2}{s[(s+b)^2 + a^2]} \tag{298}$$

より，これをラプラス逆変換すると

$$v(t) = \frac{\omega_0^2}{a^2 + b^2}[1 - e^{-bt}(\cos at + \frac{b}{a}\sin at)] \tag{299}$$

となるので，

$$v(\omega_0 t) = 1 - e^{-\frac{\omega_0 t}{2Q}}\left(\cos\frac{\sqrt{4Q^2-1}}{2Q}\omega_0 t + \frac{1}{\sqrt{4Q^2-1}}\sin\frac{\sqrt{4Q^2-1}}{2Q}\omega_0 t\right) \tag{300}$$

となります．最後の瞬時値の関数の変数が $\omega_0 t$ となっていますが，ω_0 と t は常にペアで現われるため，角周波数で基準化した時間 $\omega_0 t$ の関数であると考えてよいためです．

このステップ応答のオーバーシュートの大きさを求めるため，式 (300) が最大になる時刻を求めます．まず，式 (300) を $\omega_0 t$ について微分すると，

$$\begin{aligned} v'(\omega_0 t) &= \frac{1}{2Q}e^{-\frac{\omega_0 t}{2Q}}\left(\cos\frac{\sqrt{4Q^2-1}}{2Q}\omega_0 t + \frac{1}{\sqrt{4Q^2-1}}\sin\frac{\sqrt{4Q^2-1}}{2Q}\omega_0 t\right) \\ &\quad - e^{-\frac{\omega_0 t}{2Q}}\left(-\frac{\sqrt{4Q^2-1}}{2Q}\sin\frac{\sqrt{4Q^2-1}}{2Q}\omega_0 t + \frac{1}{2Q}\cos\frac{\sqrt{4Q^2-1}}{2Q}\omega_0 t\right) \\ &= e^{-\frac{\omega_0 t}{2Q}}\left(\frac{1}{2Q\sqrt{4Q^2-1}} + \frac{\sqrt{4Q^2-1}}{2Q}\right)\sin\frac{\sqrt{4Q^2-1}}{2Q}\omega_0 t \end{aligned} \tag{301}$$

となるので，$t = 0$ 以降でこれが最初に 0 となる時刻では，

$$\frac{\sqrt{4Q^2-1}}{2Q}\omega_0 t = \pi \tag{302}$$

[8] ラプラス変換，逆変換の表は，付録 A.3節に載せてあります．

ですから，

$$\omega_0 t_{ピーク} = \frac{2\pi Q}{\sqrt{4Q^2-1}} \tag{303}$$

となります．これを式 (300) に代入すると，ピークの大きさは，

$$v_{ピーク} = 1 + e^{-\frac{\pi}{\sqrt{4Q^2-1}}} \tag{304}$$

となります．したがって，オーバーシュートの大きさは，

$$v_{オーバーシュート} = e^{-\frac{\pi}{\sqrt{4Q^2-1}}} \tag{305}$$

となります．

$Q = 1/2$ のとき，伝達関数は，

$$H(s) = \frac{\omega_0^2}{(s+\omega_0)^2} \tag{306}$$

となり，インディシャルレスポンスは，

$$v(\omega_0 t) = 1 - e^{-\omega_0 t}(1+\omega_0 t) \tag{307}$$

となります．

$Q < 1/2$ のとき，伝達関数の極は，

$$\begin{aligned} p &= -\frac{\omega_0}{2Q} \pm \frac{\omega_0\sqrt{1-4Q^2}}{2Q} && (308)\\ &= \alpha \pm \beta && (309) \end{aligned}$$

となり，インディシャルレスポンスは，

$$\begin{aligned} v(t) &= 1 + \frac{1}{\beta} e^{\alpha t}(\alpha \sinh\beta t - \beta\cosh\beta t) \\ &= 1 + e^{\alpha t}(\frac{\alpha}{\beta}\sinh\beta t - \cosh\beta t) && (310) \end{aligned}$$

ですから，

$$v(\omega_0 t) = 1 - e^{-\frac{\omega_0 t}{2Q}}\left(\frac{1}{\sqrt{1-4Q^2}}\sinh\frac{\sqrt{1-4Q^2}}{2Q}\omega_0 t + \cosh\frac{\sqrt{1-4Q^2}}{2Q}\omega_0 t\right) \tag{311}$$

が得られます．

Q を変えたときのステップ応答のようすは，図 109のようになります．

また，Q とオーバーシュートの関係を図 110に示します．

9.4.2 負帰還をかけた特性

低域のゲインが A_0 で，2 つの負の実数の極 p_1, p_2 を持つアンプの伝達特性は，

$$A_o(s) = \frac{A_0}{(1-\frac{s}{p_1})(1-\frac{s}{p_2})} \tag{312}$$

のように表せます．ここで，2 つの極の周波数比を表す α (極の分離係数) を導入します．

$$\frac{p_2}{p_1} = \alpha \equiv 極の分離係数 \tag{313}$$

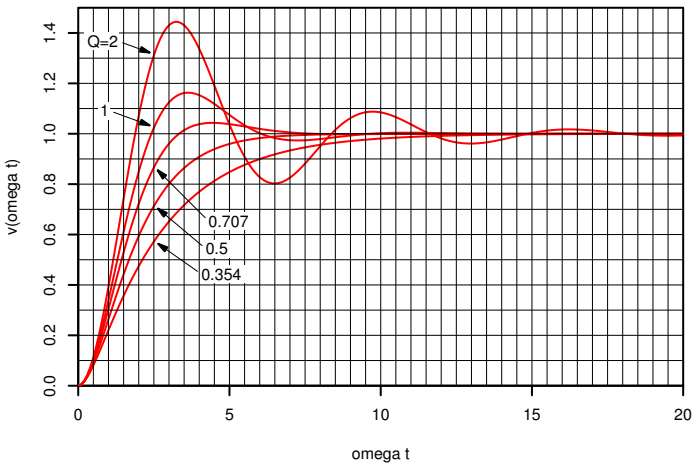

図 109: 2 次の伝達関数のステップ応答

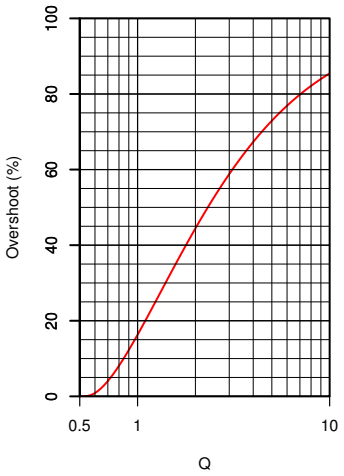

図 110: Q とオーバーシュートの関係

これは，いわゆるスタガ比のことです．これを用いると，ゲインの式は次のように表せます．

$$A_o(s) = \frac{A_0}{(1-\frac{s}{p_1})(1-\frac{s}{\alpha p_1})} \tag{314}$$

帰還率 β の負帰還をかけた後のゲイン $A_f(s)$ は，

$$\begin{aligned} A_f(s) &= \frac{A(s)}{1+A(s)\beta} \\ &= \frac{\frac{A_0}{(1-\frac{s}{p_1})(1-\frac{s}{\alpha p_1})}}{1+\frac{A_0\beta}{(1-\frac{s}{p_1})(1-\frac{s}{\alpha p_1})}} \\ &= \frac{A_0}{(1-\frac{s}{p_1})(1-\frac{s}{\alpha p_1})+A_0\beta} \\ &= \frac{A_0}{\frac{s^2}{\alpha p_1^2}-s\frac{\alpha+1}{\alpha p_1}+1+A_0\beta} \end{aligned}$$

低域の帰還量を $F_0 = 1 + A_0\beta$ とおくと，

$$A_f(s) = \frac{A_0}{F_0}\cdot\frac{1}{\frac{s^2}{F_0\alpha p_1^2}-s\frac{\alpha+1}{F_0\alpha p_1}+1} \tag{315}$$

この式の第 2 項と式 (290) の係数を比較することにより，

$$\omega_0^2 = F_0\alpha p_1^2 \tag{316}$$

$$\frac{1}{Q\omega_0} = -\frac{\alpha+1}{F_0\alpha p_1} \tag{317}$$

の関係が成り立ち，これらの式より，

$$\omega_0 = \sqrt{F_0\alpha}\,|p_1| \tag{318}$$

$$\begin{aligned} Q &= -\frac{F_0\alpha p_1}{\omega_0(\alpha+1)} \\ &= -\frac{F_0\alpha p_1}{\sqrt{F_0\alpha}\,|p_1|(\alpha+1)} \\ &= \frac{\sqrt{F_0\alpha}}{\alpha+1} \end{aligned} \tag{319}$$

となります．したがって，2 つのポールを持つアンプに負帰還をかけると，その伝達関数はやはり 2 次になります．

負帰還をかけた後のゲインのピークを目標値にコントロールするには，式 (294) より目標とする Q を求め，式 (319) を満たす α を求め，極の比が α になるように位相補償を施せばよいことになります．

式 (319) より，

$$\begin{aligned} \alpha+1 &= \frac{\sqrt{F_0\alpha}}{Q} \\ (\alpha+1)^2 &= \frac{F_0\alpha}{Q^2} \\ \alpha^2+2(1-\frac{F_0}{2Q^2})\alpha+1 &= 0 \end{aligned} \tag{320}$$

となり，$\alpha > 1$ となる解は，

$$\alpha = \frac{F_0}{2Q^2} - 1 + \sqrt{\left(\frac{F_0}{2Q^2} - 1\right)^2 - 1} \tag{321}$$

ですが，$F_0/2Q^2 \gg 1$ の場合，

$$\alpha \approx \frac{F_0}{Q^2} \approx \frac{T_0}{Q^2} \tag{322}$$

と近似できます．T_0 は，低域のループゲイン $A_0\beta$ です．

負帰還をかける前の位相余裕を知るために，ループゲインが 1 になる周波数 ω_c を求めます．ループゲイン $T(s)$ は，

$$\begin{aligned} T(s) &= A(s)\beta \\ &= \frac{A_0\beta}{(1-\frac{s}{p_1})(1-\frac{s}{\alpha p_1})} \\ &= \frac{T_0}{\frac{s^2}{\alpha p_1^2} - s\frac{\alpha+1}{\alpha p_1} + 1} \end{aligned} \tag{323}$$

$$T(j\omega) = \frac{T_0}{(1-j\frac{\omega}{p_1})(1-j\frac{\omega}{\alpha p_1})} \tag{324}$$

$$= \frac{T_0}{1 - \frac{\omega^2}{\alpha p_1^2} - j\frac{\omega(\alpha+1)}{\alpha p_1}} \tag{325}$$

ですから，ループゲインの絶対値は，

$$|T(j\omega)| = \frac{T_0}{\sqrt{\left(1-\frac{\omega^2}{\alpha p_1^2}\right)^2 + \left[\frac{\omega(\alpha+1)}{\alpha p_1}\right]^2}} \tag{326}$$

ループゲインが 1 となる周波数 ω_c は，

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{\omega_c^2}{\alpha p_1^2}\right)^2 + \left[\frac{\omega_c(\alpha+1)}{\alpha p_1}\right]^2 - T_0^2 &= 0 \\ 1 - \frac{2}{\alpha}\left(\frac{\omega_c}{p_1}\right)^2 + \frac{1}{\alpha^2}\left(\frac{\omega_c}{p_1}\right)^4 + \left(\frac{\alpha+1}{\alpha}\right)^2\left(\frac{\omega_c}{p_1}\right)^2 - T_0^2 &= 0 \\ \left(\frac{\omega_c}{p_1}\right)^4 + (\alpha^2+1)\left(\frac{\omega_c}{p_1}\right)^2 + (1-T_0^2)\alpha^2 &= 0 \end{aligned}$$

式 (322) を代入して，

$$\left(\frac{\omega_c}{p_1}\right)^4 + \left(\frac{T_0^2}{Q^4} + 1\right)\left(\frac{\omega_c}{p_1}\right)^2 + (1-T_0^2)\frac{T_0^2}{Q^4} = 0$$

$T_0^2 \gg 1, T_0/Q^2 \gg 1$ ならば，近似的に，

$$\left(\frac{\omega_c}{p_1}\right)^4 + \frac{T_0^2}{Q^4}\left(\frac{\omega_c}{p_1}\right)^2 - \frac{T_0^4}{Q^4} = 0$$

これより，

$$\left(\frac{\omega_c}{p_1}\right)^2 \approx \frac{T_0^2}{2Q^4}(-1 + \sqrt{1+4Q^4}) \tag{327}$$

ループゲインの位相は，式 (324) より，

$$\arg T(j\omega) = \tan^{-1}\frac{\omega}{p_1} + \tan^{-1}\frac{\omega}{\alpha p_1} \tag{328}$$

したがって，ゲイン交点周波数 ω_c における位相余裕 ϕ_m は，

$$\begin{aligned}\phi_m &= 180^\circ + \arg T(j\omega_c) \\ &= 180^\circ + \tan^{-1}\frac{\omega_c}{p_1} + \tan^{-1}\frac{\omega_c}{\alpha p_1}\end{aligned}$$

式 (327) より，$T_0/Q^2 \gg 1$ ならば $\omega_c/p_1 \ll -1$ なので，

$$\begin{aligned}\phi_m &= 180^\circ - 90^\circ + \tan^{-1}\frac{\omega_c}{\alpha p_1} \\ &= 90^\circ + \tan^{-1}\frac{\omega_c}{\alpha p_1}\end{aligned} \tag{329}$$

となります．

次に，負帰還をかけた後の −3 dB 周波数 ω_3 を求めます．式 (315) より，

$$\begin{aligned}A_f(s) &= \frac{A_0}{F_0}\cdot\frac{1}{\frac{s^2}{\omega_0^2}+\frac{s}{Q\omega_0}+1} \\ A_f(j\omega) &= \frac{A_0}{F_0}\cdot\frac{1}{1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}+j\frac{\omega}{Q\omega_0}} \\ |A_f(j\omega)| &= \frac{A_0}{F_0}\cdot\frac{1}{\sqrt{\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2+\frac{\omega^2}{Q^2\omega_0^2}}}\end{aligned} \tag{330}$$

−3 dB 点では，根号の中が 2 となるので，

$$\left[1-\left(\frac{\omega_3}{\omega_0}\right)^2\right]^2+\left(\frac{\omega_3}{Q\omega_0}\right)^2 = 2 \tag{331}$$

が成り立ちます．したがって，

$$\begin{aligned}\left(\frac{\omega_3}{\omega_0}\right)^4-2\left(\frac{\omega_3}{\omega_0}\right)^2+1+\frac{1}{Q^2}\left(\frac{\omega_3}{\omega_0}\right)^2-2 &= 0 \\ \left(\frac{\omega_3}{\omega_0}\right)^4+2\left(\frac{1}{2Q^2}-1\right)\left(\frac{\omega_3}{\omega_0}\right)^2-1 &= 0\end{aligned}$$

これを解くと，

$$\left(\frac{\omega_3}{\omega_0}\right)^2 = 1-\frac{1}{2Q^2}+\sqrt{\left(1-\frac{1}{2Q^2}\right)^2+1} \tag{332}$$

式 (316) に，式 (322) を代入して，

$$\omega_0^2 = F_0\alpha p_1^2 \approx F_0\frac{T_0}{Q^2}p_1^2 \approx \frac{T_0^2 p_1^2}{Q^2} \tag{333}$$

これを式 (332) に代入して整理すると，

$$\left(\frac{\omega_3}{p_1}\right)^2 = \frac{T_0^2}{Q^2}\left[1-\frac{1}{2Q^2}+\sqrt{\left(1-\frac{1}{2Q^2}\right)^2+1}\right] \tag{334}$$

利得交点周波数 ω_c に対する −3 dB 点の周波数の比は，式 (334) と式 (327) より，

$$\left(\frac{\omega_3}{\omega_c}\right)^2 = \frac{2Q^2\left[1-\frac{1}{2Q^2}+\sqrt{\left(1-\frac{1}{2Q^2}\right)^2+1}\right]}{-1+\sqrt{1+4Q^4}} \tag{335}$$

この結果をいくつかの Q について求めると，次の表のようになります．

(1) Q	(2) $\alpha = p_2/p_1$	(3) ω_c/p_1	(4) ω_3/ω_c	(5) $\phi_m = 90° + \tan^{-1}\frac{(3)}{(2)}$	A_p (dB)	オーバーシュート (%)
1.0	T_0	$-0.79T_0$	1.62	51.8°	1.25	16.3
0.9	$1.23T_0$	$-0.83T_0$	1.61	56.1°	0.69	12.3
0.8	$1.56T_0$	$-0.87T_0$	1.59	60.8°	0.21	8.1
0.707	$2T_0$	$-0.91T_0$	1.55	65.5°	0	4.3
0.6	$2.78T_0$	$-0.95T_0$	1.46	71.2°	0	0.9
0.5	$4T_0$	$-0.97T_0$	1.32	76.3°	0	0

たとえば，最初のポールが 10 kHz にあるアンプに 20 dB の負帰還 ($F_0 = 10$) をかけて，ピークが生じないようにするには，$Q = 0.7$ にする必要があります．$T_0 = 9$ より，必要なスタガ比は 18 で，第 2 のポールは 180 kHz でなければなりません．このとき，ゲイン交点周波数は 82 kHz であり，帰還後のカットオフ周波数は，$82 \times 1.55 = 127$ kHz になります．

なお，この解析ではいたるところで近似を行っていますので，誤差は 10%程度はあるでしょう．より正確な情報が必要な場合は，SPICE でシミュレーションを行います．

10　位相補償

この節では，ポールが 2 個存在するアンプに負帰還をかけることを想定し，さまざまな位相補償の方法と，その定数の定め方を見ていきます．モデルとするアンプは，低域のゲインが $A_0 = 100$ で，2 つのポールのカットオフ周波数を 20 kHz と 100 kHz と仮定します．このアンプに帰還率 $\beta = 0.1$ の負帰還をかけます．低域のループゲインは $T_0 = A_0\beta = 100 \times 0.1 = 10$，帰還量は $F = 1 + T = 11$ で，20.8 dB です．オープンループゲイン，ループゲイン，クローズドループゲインのボーデ線図を図 111に示します．ゲイン交点周波数は，124 kHz で，そのときの位相は −132°，位相余裕は 48° で，帰還後の特性にピークが生じています．帰還後の −3 dB 点は，203 kHz です．この節に登場す

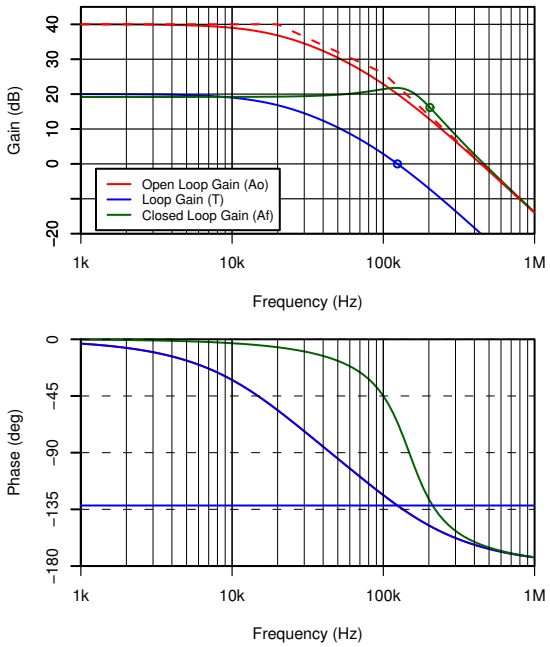

図 111: モデルアンプのボーデ線図

るポール p_1, p_2 は，負の実数ですが，特にグラフの中ではことわりなく絶対値をとった正の値として描いている場合があります．

SPICE でシミュレーションするには，図 112のようにします．ゲイン段は，後で Miller 効果を用いた補正を行うため，10 倍の反転増幅を 2 段重ねています．2 つのポールは，RC によるローパス回路で実現します．最後にゲインが 1 のバッファにより，RC 回路の影響を遮断して出力としています．ループゲインは，入力を与えずに，負帰還ループを開いてそのゲインを測るべきですが，このシミュレーションの回路の形式では，入力から β 回路の出力である B 点までのゲインと等しくなります．負帰還をかけた後の 10 kHz 方形波応答も載せてあります．ごらんのように，かなり大きなオーバーシュートが見られます．ゲイン交点周波数 (図 112の周波数特性のカーソル a)，位相余裕 (図 113のカーソル c-d) とも，計算で求めたとおりです．

負帰還の節で調べたように，周波数特性でピークを生じないようにするには，$Q = 0.707$ とする必要があります．このとき必要なスタガ比は，$\alpha' = 2T_0 = 20$ です．現在のスタガ比は $\alpha = p_2/p_1 = 5$ です．

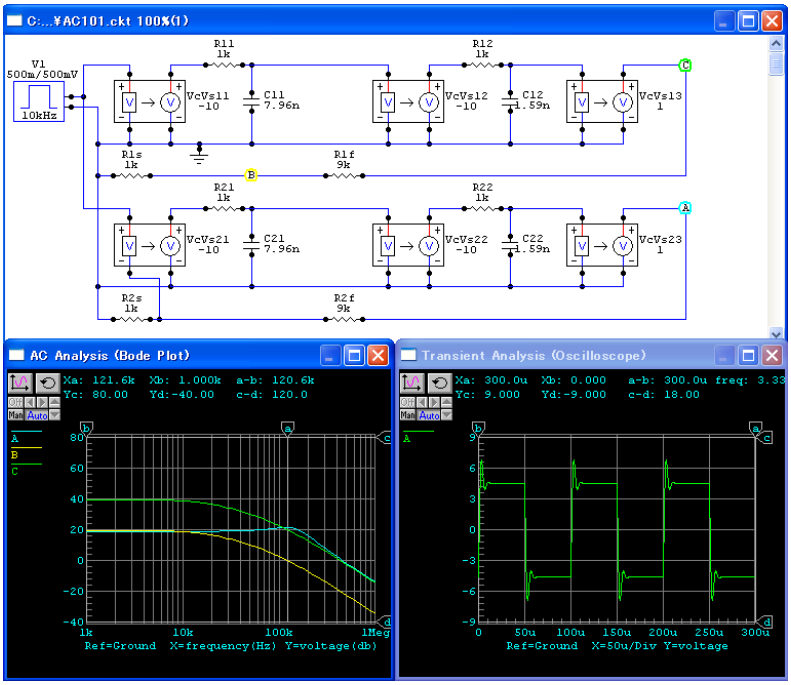

図 112: モデルアンプのシミュレーション

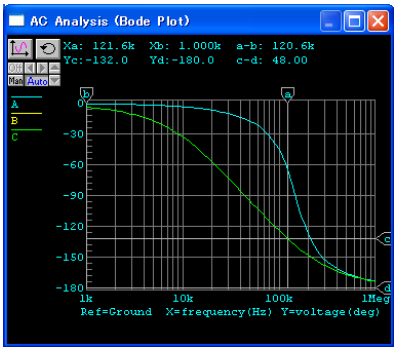

図 113: モデルアンプの位相特性

10.1　位相補償の方法

スタガ比を大きくするには,

1. p_1 を低くする (狭帯域化)
2. p_1 を低くし，p_2 を高くする (ラグリード補償)
3. p_2 を高くする (微分型位相補償)

の 3 通りの方法が考えられます.

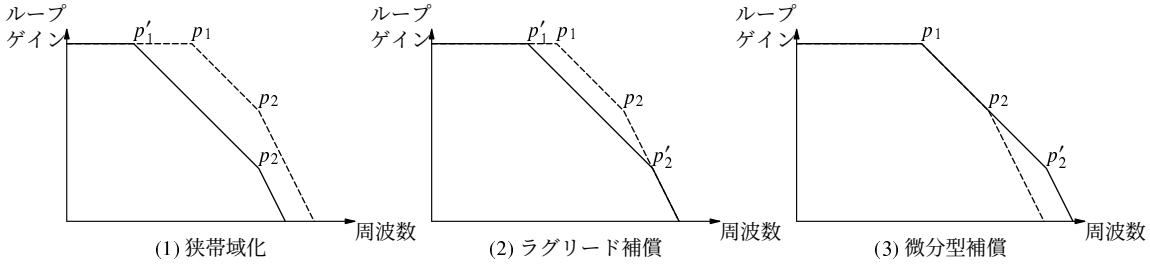

図 114: 位相補償の方法

狭帯域化およびラグリード補償は，第一ポール p_1 を生じている箇所で行います．微分型補償は，負帰還回路 (β 回路) で行うため，一般に p_1 とも p_2 とも干渉せずに定数を決めることができます．狭帯域化と同様な周波数特性を得るために，p_1 以外の箇所で補償をすることもでき，ステップ補償と呼ばれます.

10.2　狭帯域化による補償

狭帯域化では，第一ポールをさらに下げて必要なスタガ比を確保します．$\alpha' = 20$ とするためには，移動後の第一ポール p_1' を,

$$p_1' = \frac{p_2}{\alpha'} = \frac{100 \times 10^3}{20} = 5\,[\mathrm{kHz}] \tag{336}$$

にする必要があります．これは元の p_1 の 1/4 ですから，第一ポールを構成している容量 C_1 にその 3 倍のコンデンサを付加して，容量の合計を C_1 の 4 倍にすれば目的を達することができます．したがって，補償のための容量 C_f は,

$$C_f = \left(\frac{\alpha'}{\alpha} - 1\right)C_1 = \left(\frac{20}{5} - 1\right) \cdot 7.96 \times 10^{-9} = 23.88 \times 10^{-9}\,[\mathrm{F}] \tag{337}$$

となります.

狭帯域化による補償を行った場合，図 115のように，ゲイン交点周波数は，45.3 kHz になり，そのときの位相は −108°，位相余裕は 72° になります．帰還後の −3 dB 点は，74 kHz です.

補償後のシミュレーションは，図 116のようになります．補償後の特性にピークは見られなくなり，オーバーシュートは 4.2%程度で，ほぼ 2 次のバタワース特性といえます.

第一のポールを生じている部分のインピーダンスが低く，補償容量が大きくなる場合は，直後のゲイン段にコンデンサを入れれば，ミラー効果により増幅度の分大きなコンデンサの働きをします

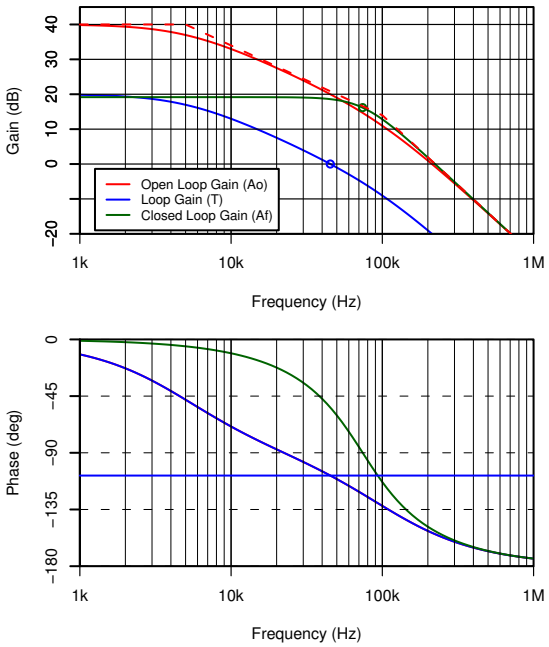

図 115: 狭帯域化による位相補償のボーデ線図

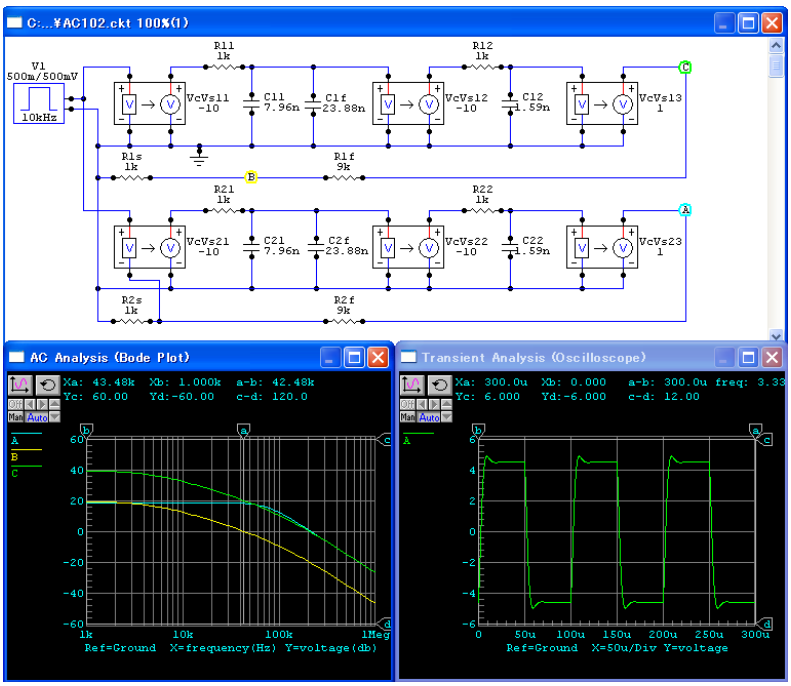

図 116: 狭帯域化による位相補償のシミュレーション

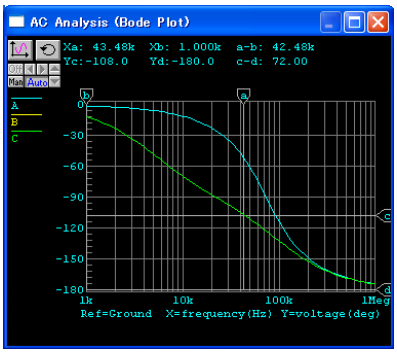

図 117: 狭帯域化による位相補償の位相特性

から，小さな容量で同等な効果を得ることができます．たとえば，直後のゲインが 10 倍であれば，コンデンサの容量を 1/(1+10) にできます．

ミラー効果を利用した狭帯域化のシミュレーションを図 118に示します．図 116の補償容量の 1/11

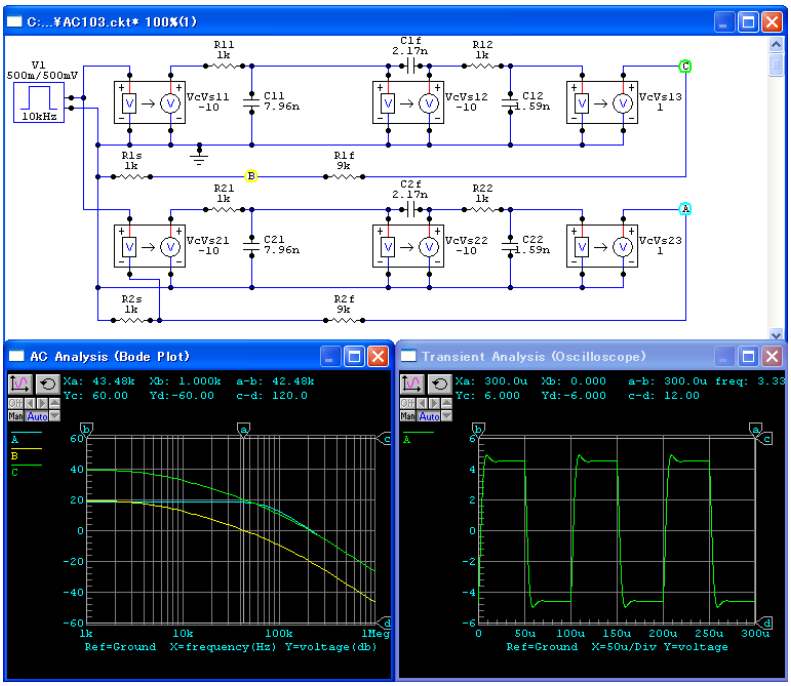

図 118: ミラー効果を利用した狭帯域化による位相補償のシミュレーション

を使用していますが，同等の効果が得られています．

実際には，この例の回路では，補償容量は R11 の右端と R12 の右端の間に入ります．8.8節で見たように，こうすると p_2 は極分離によってさらに高い周波数へと移動するので，負帰還はさらに安定にかかるようになります．

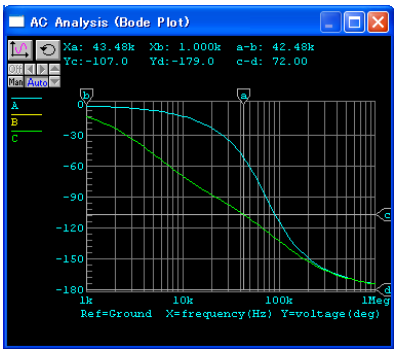

図 119: ミラー効果を利用した狭帯域化による位相補償の位相特性

10.3 ステップ補償

狭帯域化を行いたくても，第一ポールの容量を増やせない場合は，図 120の (b) のようなステップ特性を挿入することにより，同図 (c) のようにポールの位置を下げることができます．

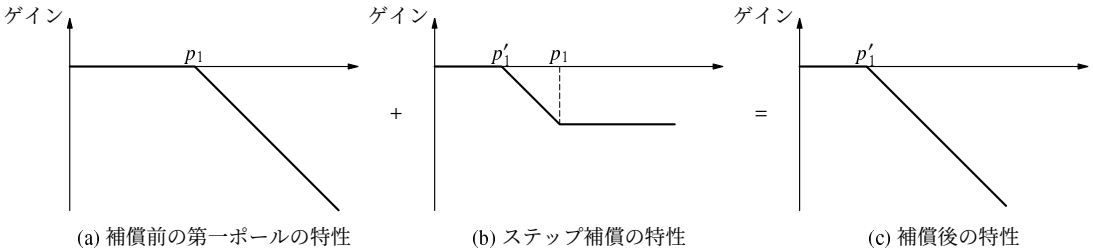

図 120: ステップ補償

ステップ補償の回路は，図 121のようなものです．この回路の伝達特性は，

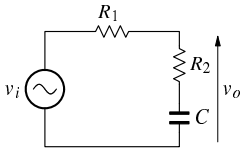

図 121: ステップ補償の回路

$$A(s) = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot \frac{1 - s/z}{1 - s/p} \tag{338}$$

で，ポールとゼロの値は，

$$p = -\frac{1}{C(R_1 + R_2)} \tag{339}$$

$$z = -\frac{1}{CR_2} \tag{340}$$

となります．ステップ補償では，$p = p_1', z = p_1$ とすればよいのです．したがって，

$$CR_2 = -\frac{1}{p_1} \tag{341}$$

$$R_1 \quad = \quad \left(\frac{\alpha'}{\alpha} - 1\right) R_2 \tag{342}$$

となるように定数を選定します.

ステップ補償による狭帯域化のシミュレーションを，図 122に示します．このモデルアンプの場

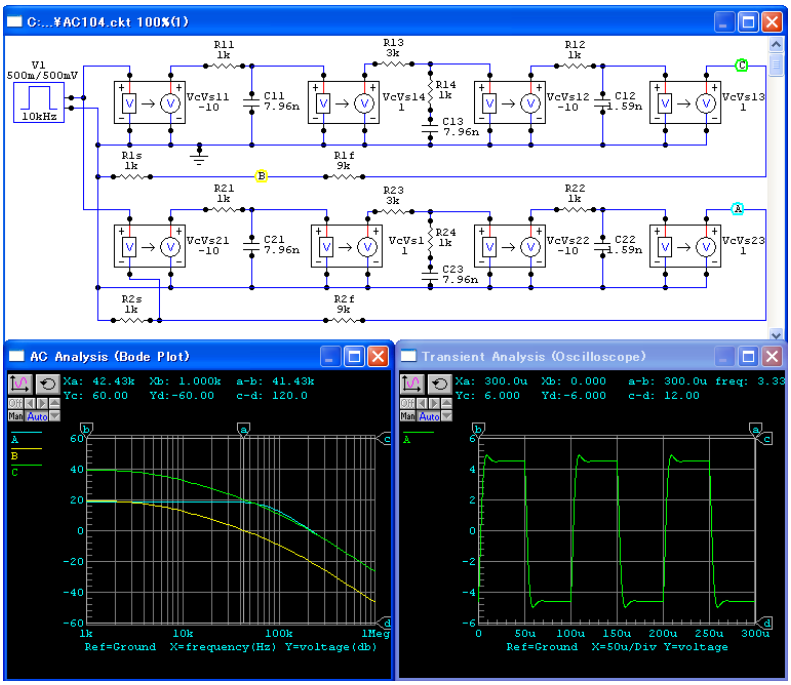

図 122: ステップ補償のシミュレーション

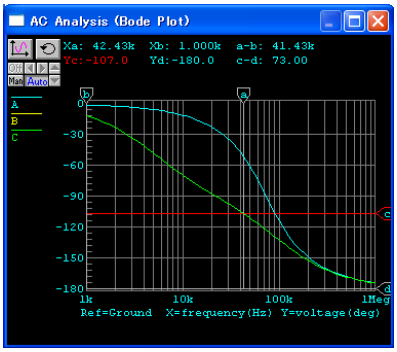

図 123: ステップ補償の位相特性

合，第一ポールを構成している時定数は，$1 \times 10^3\,\Omega$, $7.96 \times 10^{-9}\,\mathrm{F}$ なので，この値をそのまま補償回路の R_2 と C として使いました．R_1 は，

$$R_1 = \left(\frac{\alpha'}{\alpha} - 1\right) R_2 = \left(\frac{20}{5} - 1\right) \cdot 1 \times 10^3 = 3 \times 10^3\,[\Omega] \tag{343}$$

となります.

今回は，バッファ `VcVs14` を追加して，p_1, p_2 に影響のないようにしています．実際には，位相補償のために周波数特性が無限にのびたバッファを入れることはありえません．通常は，p_2 を生じている段にステップ補償を行うことになります．シミュレーションの回路の場合，図 121の R_1 が 1 kΩ と定められていますので，

$$\begin{aligned} R_2 &= R_1/3 = 333\,\Omega \\ C &= 7.96 \times 10^{-9} \cdot 3 = 23.88 \times 10^{-9}\,\mathrm{F} \end{aligned}$$

となります．回路上は，次のラグリード補償とまったく同じように見えますが，p_1 に対して補償回路を入れるか，p_2 に対して補償回路を入れるかによって，働きがまったく違うことに注意してください．

10.4 ラグリード補償

第一ポール p_1 がある部分の特性を，図 124の左上から右上のように変更できれば，全体の特性を右下のようにすることができ，必要なスタガ比を得ることができます．すなわち，もともとあったポール p_1 を p_1' に移動し，p_2 にゼロを作り，p_2' に新たにポールを作ります．

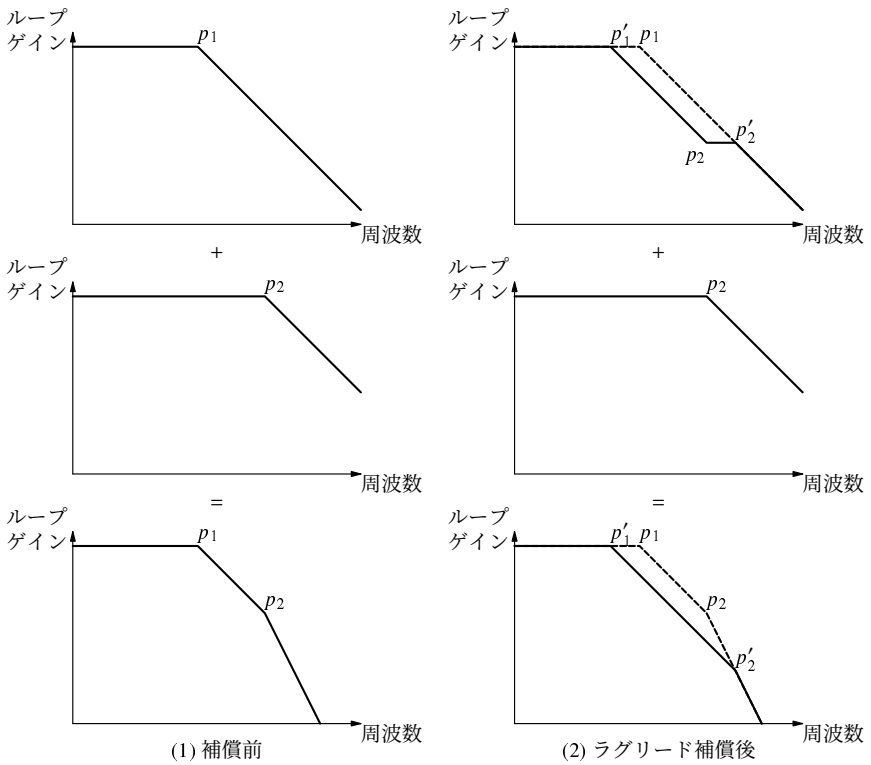

図 124: ラグリード補償

このような特性を得るには，図 125のように，抵抗とコンデンサを直列にしたものを，第一ポールを生じている部分に入れます．

p_1 を p_1' へと低くする比率と，p_2 を p_2' へと高くする比率は等しく，これを γ (極の分離係数) と

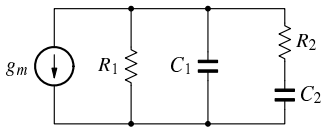

図 125: ラグリード補償の回路

します．つまり，

$$\frac{p_1}{p_1'} = \frac{p_2'}{p_2} = \gamma \tag{344}$$

です．補償後のスタガ比を α' とすると，

$$\alpha' = \frac{p_2'}{p_1'} = \frac{\gamma p_2}{p_1/\gamma} = \gamma^2 \frac{p_2}{p_1} \tag{345}$$

より，

$$\gamma = \sqrt{\frac{\alpha' p_1}{p_2}} \tag{346}$$

により γ を求めることができます．

この γ を用いて p_1 以外の極 (p_2 はゼロですが) を p_1 を使って表すと，

$$p_1' = p_1/\gamma \tag{347}$$

$$p_2' = \alpha' p_1/\gamma \tag{348}$$

$$p_2 = \alpha' p_1/\gamma^2 \tag{349}$$

となります．

この希望する周波数特性を持つ伝達関数は，

$$A(s) = \frac{1 - \frac{s}{p_2}}{(1 - \frac{s}{p_1'})(1 - \frac{s}{p_2'})} \tag{350}$$

という形であり，これに式 (347)~(349) を代入すると，

$$\begin{aligned} A(s) &= \frac{1 - \frac{s}{\alpha' p_1/\gamma^2}}{(1 - \frac{s}{p_1/\gamma})(1 - \frac{s}{\alpha' p_1/\gamma})} \\ &= \frac{1 - \frac{s}{\alpha' p_1/\gamma^2}}{1 - \frac{\alpha'+1}{\alpha' p_1/\gamma} s + \frac{s^2}{\alpha' p_1^2/\gamma^2}} \end{aligned} \tag{351}$$

となります．

一方，図 125の回路の伝達関数は，

$$A'(s) = -g_m R_1 \frac{1 + sC_2R_2}{1 + s(C_1R_1 + C_2R_1 + C_2R_2) + s^2 C_1C_2R_1R_2} \tag{352}$$

ですから，式 (351) と定数項 ($-g_mR_1$) を除いて恒等となるには，s の各係数が等しくなければなりません．これより，

$$-\frac{1}{\alpha' p_1/\gamma^2} = C_2R_2 = -\frac{1}{p_2} \tag{353}$$

$$\frac{1}{\alpha' p_1^2/\gamma^2} = C_1C_2R_1R_2 \tag{354}$$

$$-\frac{\alpha'+1}{\alpha' p_1/\gamma} = C_1R_1 + C_2R_1 + C_2R_2 \tag{355}$$

C_1R_1 は，補償前から存在していた時定数で，

$$C_1R_1 = -\frac{1}{p_1} \tag{356}$$

ですから，式 (353) と式 (354) は同じ意味です．式 (355) を整理すると，

$$\begin{aligned}
-\frac{(\alpha'+1)\gamma}{\alpha' p_1} &= C_1R_1 + \frac{C_2R_2R_1}{R_2} + C_2R_2 \\
&= C_1R_1 + \left(\frac{R_1}{R_2}+1\right)C_2R_2 \\
&= -\frac{1}{p_1} - \left(\frac{R_1}{R_2}+1\right)\frac{1}{\alpha' p_1/\gamma^2} \\
(\alpha'+1)\gamma &= \alpha' + \left(\frac{R_1}{R_2}+1\right)\gamma^2 \\
\alpha'\gamma + \gamma - \alpha' &= \left(\frac{R_1}{R_2}+1\right)\gamma^2 \\
\frac{\alpha'\gamma+\gamma-\alpha'}{\gamma^2} &= \frac{R_1}{R_2}+1 \\
\frac{\alpha'\gamma+\gamma-\alpha'-\gamma^2}{\gamma^2} &= \frac{R_1}{R_2} \\
R_2 &= \frac{\gamma^2 R_1}{\alpha'\gamma+\gamma-\alpha'-\gamma^2} \\
&= \frac{\gamma^2 R_1}{(\alpha'-\gamma)(\gamma-1)}
\end{aligned} \tag{357}$$

となり，R_2 の値を決定できます．C_2 の値は，式 (353) より，

$$C_2 = -\frac{1}{p_2R_2} \tag{358}$$

となります．

モデルアンプの場合の定数を求めます．極の移動係数 γ は，

$$\gamma = \sqrt{\frac{20\cdot 20\times 10^3}{100\times 20^3}} = 2 \tag{359}$$

となります．これより，

$$R_2 = \frac{2^2\cdot 1\times 10^3}{(20-2)(2-1)} = 222\,[\Omega] \tag{360}$$

$$C_2 = \frac{1}{2\cdot 3.14\cdot 100\times 10^3\cdot 222} = 7.17\times 10^{-9}\,[\mathrm{F}] \tag{361}$$

となります．

ラグリード補償を行った場合，図 126のように，ゲイン交点周波数は，90.5 kHz になり，そのときの位相は −108°，位相余裕は 72° になります．帰還後の −3 dB 点は，148 kHz です．

ラグリード補償による狭帯域化のシミュレーションを，図 127に示します．

簡単に定数の目安をつけるには，次のようにします．p_1' は，C_1 と C_2 の並列合成値と R_1 によって概ね決まります．今回の場合，p_1' を p_1 の半分にしたいので，C_2 としては C_1 と同じ値を使えばよいことがわかります．

p_2' は，R_2 と C_2 によって決まります．今回の場合，これが p_2 の 2 倍となるように，R_2 の値を決めます．

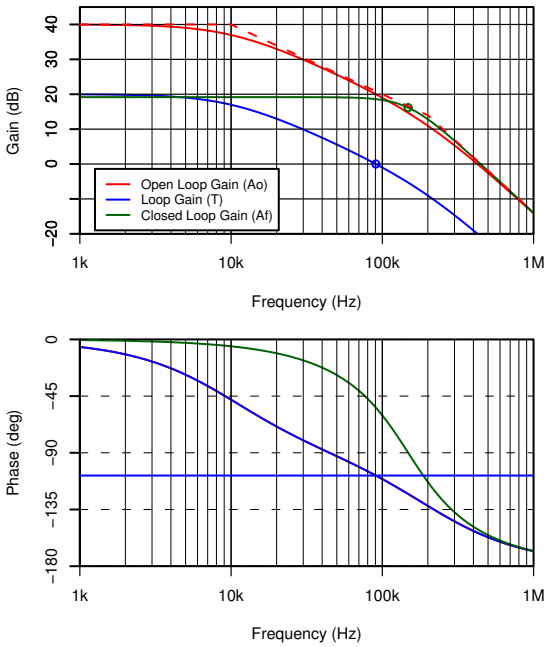

図 126: ラグリード補償のボーデ線図

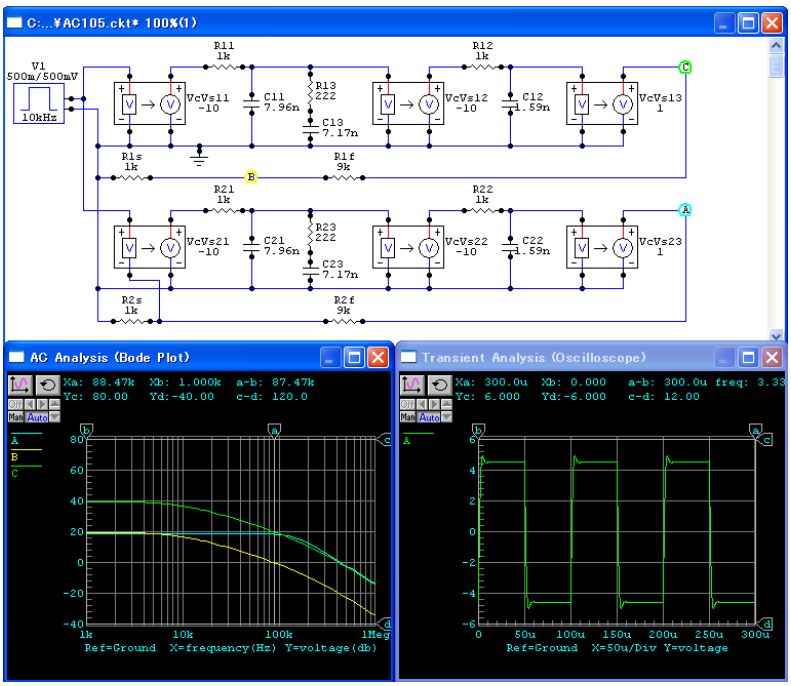

図 127: ラグリード補償のシミュレーション

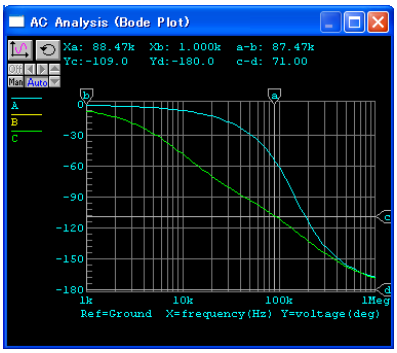

図 128: ラグリード補償の位相特性

10.5 微分型補償

微分型補償は，図 129のように，帰還抵抗 R_f に補償用のコンデンサ C_f を並列に接続し，第二のポール p_2 をさらに高域に移動させるものです．

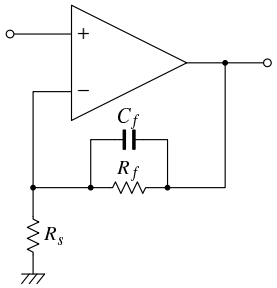

図 129: 微分型補償

この β 回路の伝達特性は，

$$\beta(s) = \frac{R_s}{R_f + R_s} \cdot \frac{1 - s/z_f}{1 - s/p_f} \tag{362}$$

で，ゼロとポールの値は，

$$z_f = -\frac{1}{C_f R_f} \tag{363}$$

$$p_f = -\frac{1}{C_f(R_f//R_s)} \tag{364}$$

となります．低域の帰還率を $\beta_0 = R_s/(R_f + R_s)$ とおけば，式 (362) は，次のように書けます．

$$\beta(s) = \beta_0 \frac{1 - s/z_f}{1 - s/p_f} \tag{365}$$

帰還回路の低域のゲインは $\beta_0 = R_s/(R_s + R_f)$ で，z_f からゲインが上昇し，p_f でゲインが 1 となり，それ以上の周波数では全帰還となります．単に z_f を p_2 に合わせればよいように思われますが，帰還後の特性を正確に追っていく必要があります．

β 回路のポールとゼロの比率は，

$$\frac{p_f}{z_f} = \frac{C_f R_f}{C_f(R_f//R_s)} = \frac{R_f(R_f + R_s)}{R_f R_s} = \frac{R_f + R_s}{R_s} = \frac{1}{\beta_0}$$

で，帰還率が小さければ $p_f \gg z_f$ となり，p_f の存在を無視することができます．その場合，β 回路の伝達関数は次のように近似できます．

$$\beta(s) \approx \beta_0(1 - s/z_f) \tag{366}$$

この結果を使うと，負帰還を掛けた後の伝達関数 $A_f(s)$ は，

$$\begin{aligned}
A_f(s) &= \frac{A_o(s)}{1 + A_o(s)\beta(s)} \\
&= \frac{\frac{A_0}{(1-s/p_1)(1-s/p_2)}}{1 + \frac{A_0}{(1-s/p_1)(1-s/p_2)}\beta_0(1 - s/z_f)} \\
&= \frac{A_0}{(1 - s/p_1)(1 - s/p_2) + A_0\beta_0(1 - s/z_f)} \\
&= \frac{A_0}{1 - (\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2})s + \frac{s^2}{p_1p_2} + T_0 - \frac{T_0}{z_f}s} \\
&= \frac{A_0}{\frac{s^2}{p_1p_2} - (\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \frac{T_0}{z_f})s + 1 + T_0} \\
&= \frac{A_0}{\frac{s^2}{p_1p_2(1+T_0)} - (\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \frac{T_0}{z_f})\frac{s}{1+T_0} + 1}
\end{aligned} \tag{367}$$

これは 2 次の伝達関数ですから，

$$\omega_0^2 = (1 + T_0)p_1p_2 \tag{368}$$

$$\frac{1}{Q\omega_0} = -\left(\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \frac{T_0}{z_f}\right) \cdot \frac{1}{1 + T_0} \tag{369}$$

これより，

$$\begin{aligned}
Q\omega_0 &= -\frac{1 + T_0}{\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \frac{T_0}{z_f}} \\
&= -\frac{(1 + T_0)p_1p_2}{p_1 + p_2 + \frac{T_0p_1p_2}{z_f}} \\
&= -\frac{\omega_0^2}{p_1 + p_2 + \frac{T_0p_1p_2}{z_f}} \\
Q &= -\frac{\omega_0}{p_1 + p_2 + \frac{T_0p_1p_2}{z_f}} \\
p_1 + p_2 + \frac{T_0p_1p_2}{z_f} &= -\frac{\omega_0}{Q} \\
\frac{T_0p_1p_2}{z_f} &= -\frac{\omega_0}{Q} - p_1 - p_2 \\
z_f &= -\frac{T_0p_1p_2}{\frac{\omega_0}{Q} + p_1 + p_2}
\end{aligned} \tag{370}$$

こうして求めたゼロの値が負にならない場合は，すでにポールが十分に離れており，位相補償の必要はありません．

まとめると，

$$\omega_0 = \sqrt{(1 + T_0)p_1p_2} \qquad \text{(負帰還後のカットオフ角周波数)} \tag{371}$$

$$z_f = -\frac{T_0 p_1 p_2}{\frac{\omega_0}{Q} + p_1 + p_2} \quad \text{(作成するゼロの角周波数)} \tag{372}$$

$$C_f = \frac{1}{|z_f| R_f} \tag{373}$$

となります.

モデルアンプの場合，$R_f = 9\,\mathrm{k\Omega}$ とすれば,

$$\begin{aligned}
p_1 &= -2\pi \times 20 \times 10^3 = -126 \times 10^3 \\
p_2 &= -2\pi \times 100 \times 10^3 = -628 \times 10^3 \\
\omega_0 &= \sqrt{11 \cdot 126000 \cdot 628000} = 932000\,[\mathrm{rad/s}] = 148\,[\mathrm{kHz}] \\
z_f &= -\frac{10 \cdot 126000 \cdot 628000}{\frac{932000}{0.707} - (126000 + 628000)} = -1.40\,[\mathrm{Mrad/s}] = -223\,[\mathrm{kHz}] \\
C_f &= \frac{1}{1.40 \times 10^6 \cdot 9 \times 10^3} = 79.4 \times 10^{-12}\,[\mathrm{F}]
\end{aligned}$$

となります.

微分補償を行った場合，図 130のように，ゲイン交点周波数は，137 kHz になり，そのときの位相は −107°，位相余裕は 73° になります．β 回路の周波数特性は，図のオレンジ色の線のように z_f

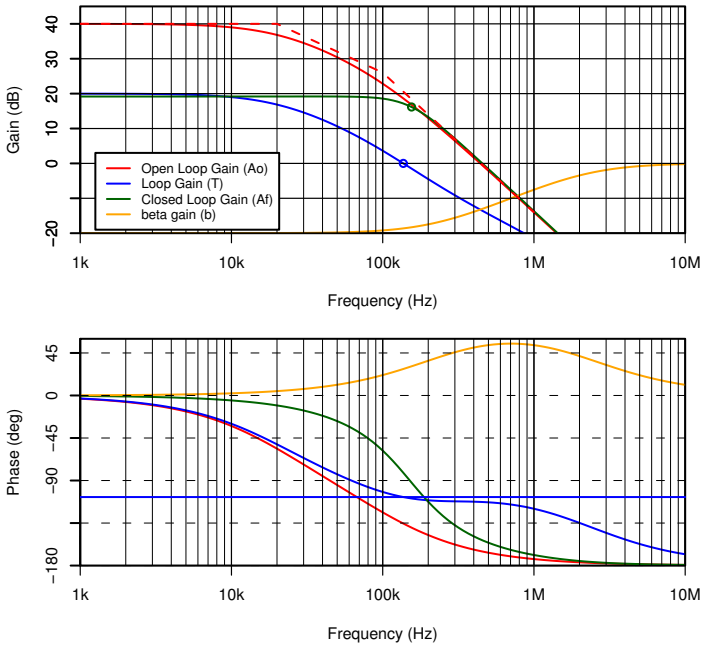

図 130: 微分補償のボーデ線図

から上昇し，最終的にはゲインが 1 となります．β 回路の位相は，10 kHz あたりから進みはじめ，700 kHz あたりで進みが最大となり，再び 0 に戻っていきます．この位相の進みにより，ループゲインの位相の遅れが 100 kHz から 800 kHz あたりでほぼ一定となり，位相余裕が確保されます．帰還後の −3 dB 点は，155 kHz です.

微分補償による狭帯域化のシミュレーションを，図 131に示します.

これまでの位相補償の結果をまとめると，次の表のようになります.

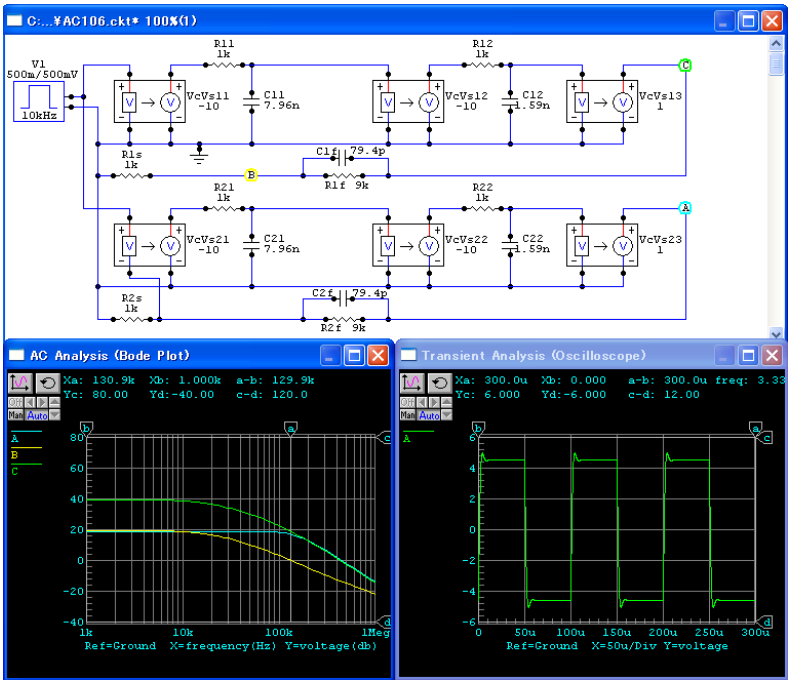

図 131: 微分補償のシミュレーション

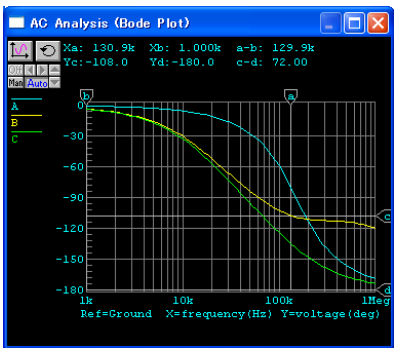

図 132: 微分補償の位相特性

方法	ゲイン交点周波数	位相余裕	帰還後カットオフ周波数
補償なし	124 kHz	48°	203 kHz
狭帯域化	45.3 kHz	72°	74 kHz
ラグリード補償	90.5 kHz	72°	148 kHz
微分型補償	137 kHz	73°	155 kHz

この表だけを見ると微分型補償がもっともよいように思われますが，一般に容量性の負荷に対する安定性が低いので，さまざまな負荷を与えた場合の安定性を十分に検討する必要があります.

11　出力段の位相補償

この節では，出力トランスの一次側や二次側に位相補償用の素子を付加した回路の特性を調べます．出力トランスの等価回路は，そのままでは複雑になるので，浮遊容量などをすべて一次側に集めて解析をしていくので，実際の特性とは少し異なりますので，その点をご了承願います．

11.1　出力段の特性

出力トランス付きの出力段の等価回路は，図 133のように表せます．ここで，

$$
\begin{aligned}
g_m &= \text{出力デバイスの相互コンダクタンス} \\
r_p &= \text{出力デバイスの出力 (内部) 抵抗} \\
L_l &= \text{出力トランスの漏れインダクタンス} \\
C_s &= \text{出力トランスの一次換算浮遊容量} \\
R_L &= \text{一次換算負荷}
\end{aligned}
$$

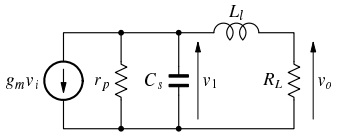

図 133: 出力段の等価回路

出力段の伝達関数を求めます．

$$
\begin{aligned}
v_1 &= -g_m v_i [r_p // Z_{C_s} // (Z_{L_l} + R_L)] \\
&= -\frac{g_m v_i}{\frac{1}{r_p} + sC_s + \frac{1}{sL_l + R_L}} \\
&= -\frac{g_m r_p (sL_l + R_L) v_i}{sL_l + R_L + sC_s r_p (sL_l + R_L) + r_p} \\
&= -\frac{g_m r_p (sL_l + R_L) v_i}{s^2 L_l C_s r_p + s(L_l + C_s r_p R_L) + r_p + R_L} \\
v_o &= v_1 \frac{R_L}{sL_l + R_L} \\
&= -\frac{g_m r_p R_L v_i}{s^2 L_l C_s r_p + s(L_l + C_s r_p R_L) + r_p + R_L} \\
&= -g_m \frac{r_p R_L}{r_p + R_L} v_i \cdot \frac{1}{s^2 \frac{L_l C_s r_p}{r_p + R_L} + s[\frac{L_l}{r_p + R_L} + C_s (r_p // R_L)] + 1} \\
A(s) &= -g_m (r_p // R_L) \cdot \frac{1}{s^2 \frac{L_l C_s r_p}{r_p + R_L} + s[\frac{L_l}{r_p + R_L} + C_s (r_p // R_L)] + 1}
\end{aligned}
$$

低域のゲインを $A_0 = -g_m (r_p // R_L)$ とおけば，

$$
A(s) = A_0 \cdot \frac{1}{s^2 \frac{L_l C_s r_p}{r_p + R_L} + s[\frac{L_l}{r_p + R_L} + C_s (r_p // R_L)] + 1} \tag{374}
$$

この回路の固有振動周波数 w_0 と Q は,

$$w_0 = \sqrt{\frac{r_p + R_L}{L_l C_s r_p}} \tag{375}$$

$$Q = \frac{\sqrt{(r_p + R_L) L_l C_s r_p}}{L_l + C_s r_p R_L} \tag{376}$$

11.2 1 次側の位相補償

出力トランスの 1 次側で積分型の位相補償を行なった場合の等価回路は，図 134のように表せます.

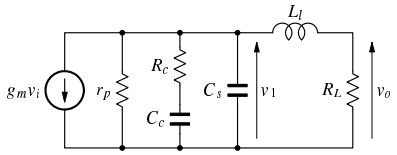

図 134: 出力トランスの 1 次側の位相補償

出力段の伝達関数を求めます.

$$\begin{aligned}
v_1 &= -g_m v_i [r_p // (R_c + Z_{C_c}) // Z_{C_s} // (Z_{L_l} + R_L)] \\
&= -\frac{g_m v_i}{\frac{1}{r_p} + \frac{1}{R_c + \frac{1}{sC_c}} + sC_s + \frac{1}{sL_l + R_L}} \\
&= -\frac{g_m v_i}{\frac{1}{r_p} + \frac{sC_c}{sC_c R_c + 1} + sC_s + \frac{1}{sL_l + R_L}} \\
&= -\frac{g_m r_p (sL_l + R_L)(sC_c R_c + 1) v_i}{(sL_l + R_L)(sC_c R_c + 1) + sC_c r_p (sL_l + R_L) + sC_s r_p (sL_l + R_L)(sC_c R_c + 1) + r_p (sC_c R_c + 1)} \\
&= -\frac{g_m r_p (sL_l + R_L)(sC_c R_c + 1) v_i}{s^3 L_l C_c C_s r_p R_c + s^2 \{L_l [C_s r_p + C_c (r_p + R_c)] + C_c C_s r_p R_c R_L\} + s[L_l + C_s r_p R_L + C_c (r_p R_L + r_p R_c + R_c R_L)] + r_p + R_L} \\
v_o &= v_1 \frac{R_L}{sL_l + R_L} \\
&= -\frac{g_m r_p R_L (sC_c R_c + 1) v_i}{s^3 L_l C_c C_s r_p R_c + s^2 \{L_l [C_s r_p + C_c (r_p + R_c)] + C_c C_s r_p R_c R_L\} + s[L_l + C_s r_p R_L + C_c (r_p R_L + r_p R_c + R_c R_L)] + r_p + R_L} \\
&= -g_m (r_p // R_L) v_i \cdot \frac{sC_c R_c + 1}{a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + 1}
\end{aligned}$$

ここで,

$$\begin{aligned}
a_3 &= \frac{L_l C_c C_s r_p R_c}{r_p + R_L} \\
a_2 &= \frac{L_l [C_s r_p + C_c (r_p + R_c)] + C_c C_s r_p R_c R_L}{r_p + R_L} \\
a_1 &= \frac{L_l + C_s r_p R_L + C_c (r_p R_L + r_p R_c + R_c R_L)}{r_p + R_L}
\end{aligned}$$

です.

11.2.1　数値例

ここでは，例として，次のパラメータのトランスを使った出力段の位相補償を行います．

$$
\begin{aligned}
L_l &= 42.3\,\mathrm{mH} \\
C_s &= 284\,\mathrm{pF} \\
R_L &= 5\,\mathrm{k\Omega}
\end{aligned}
$$

出力管の内部抵抗は，1.35 kΩ (三極管) または 23 kΩ (五極管) とします．

補償用抵抗として，2.5 kΩ, 5 kΩ, 10 kΩ を使った場合に，補償用容量を変化させたときのポールとゼロの値を，図 135に示します．プログラムは，以下のようになります．

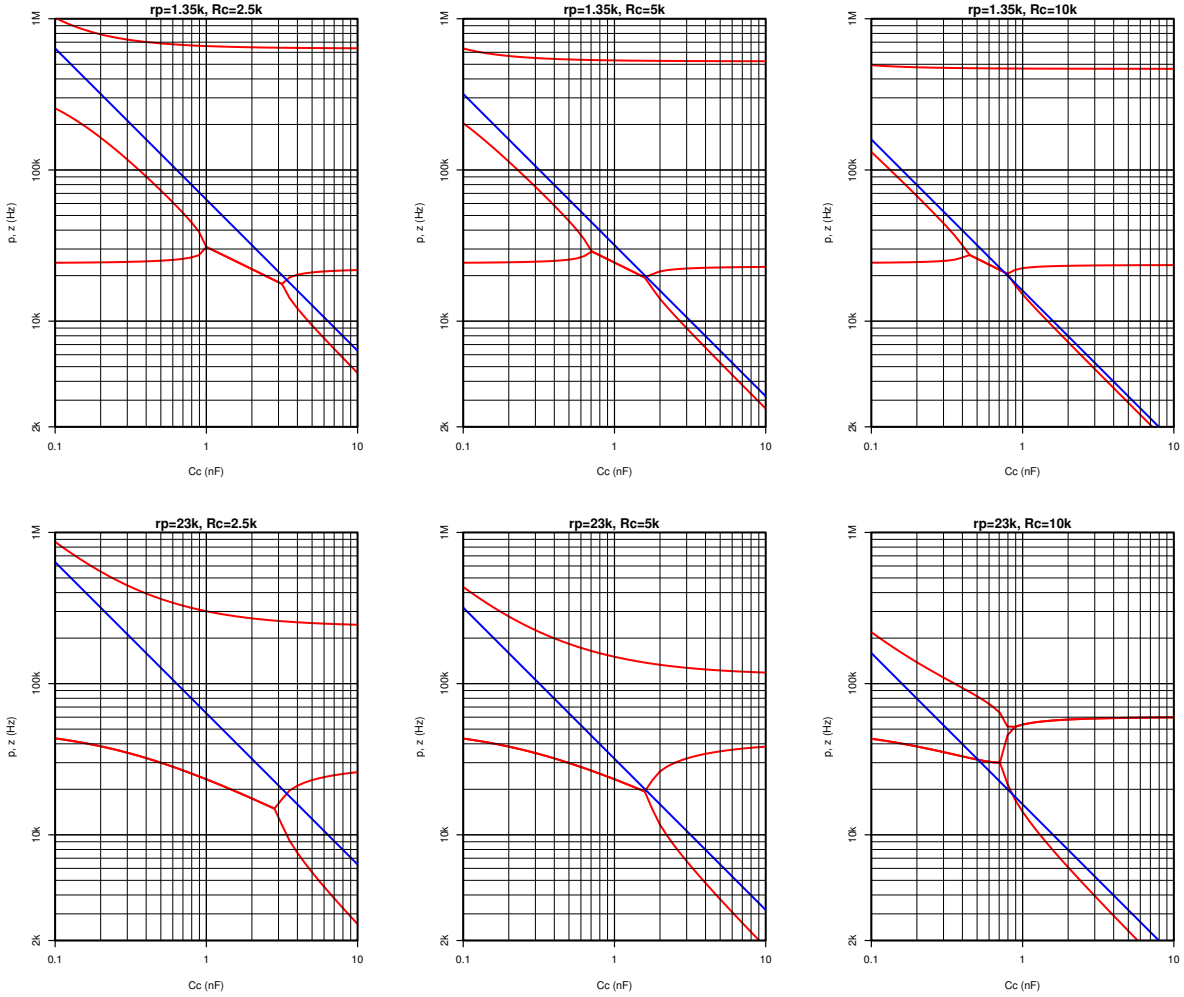

図 135: OPT 1 次側の位相補償のポールとゼロ

```
function ()
{
    # OPT1 次側による位相補償
```

```
    Ll <- 42.3e-3               # 漏れインダクタンス
    Cs <- 284e-12               # 浮遊容量
    RL <- 5e3                   # 負荷抵抗
    rp <- c(1.35e3, 23e3)       # 内部抵抗
    Rc <- c(2.5e3, 5e3, 10e3)       # 補償抵抗
    Cc <- dec(0.1, 10, 20) * 1e-9   # 補償容量
    par(mfrow=c(2, 3))
    for (k in seq(along=rp)) {
        for (i in seq(along=Rc)) {
            z <- matrix(NA, length(Cc), 4,      # ポールとゼロを格納する領域
                    dimnames=list(Cc, c("p1", "p2", "p3", "z")))
            for (j in seq(along=Cc)) {
                pz <- optpc1(rp=rp[k], Ll=Ll, Cs=Cs, RL=RL, Rc=Rc[i], Cc=Cc[j])
                z[j, 1:3] <- pz$p
                z[j, 4] <- pz$z
            }
            logplot(Cc*1e9, abs(z)/2/pi,
                type="l", col=c(rep("red", 3), "blue"), lty=1,
                xlab="Cc (nF)", ylab="p, z (Hz)",
                ylim=c(2e3, 1e6),
                main=paste("rp=", eunit(rp[k]), ", Rc=", eunit(Rc[i]), sep=""))
        }
    }
}
```

関数 optpc1 は，OPT の 1 次側で位相補償をした場合のポールとゼロを求める関数で，内容は以下のとおりです．

```
function(rp, Cs, Ll, RL, Rc, Cc)
{
    a3 <- Ll * Cc * Cs * rp * Rc
    a2 <- Ll * (Cs * rp + Cc * (rp + Rc)) + Cc * Cs * rp * Rc * RL
    a1 <- Ll + Cs * rp * RL + Cc * (rp * RL + rp * Rc + Rc * RL)
    a0 <- rp + RL
    p <- tri(a3, a2, a1, a0)    # ポールは 3 次方程式の解
    o <- order(abs(p))          # ポールの絶対値の大きさ順
    z <- -1/(Cc * Rc)
    list(p=p[o], z=z)
}
```

関数 tri は 3 次方程式の解を求める関数です．

赤い線はポールの周波数，青い線はゼロの周波数です．赤い線は，3 本あるはずですが，2 つの線がくっついているところもあります．この場合，分母多項式の解は複素数になります．スタガ比がもっとも大きくなるのは，2 番目のポールの周波数とゼロの周波数を等しい場合です．この場合のスタガ比は，

$$\alpha' = \frac{p_3}{p_1}$$

となります．

ある補償容量に対して，$p_2 = z$ となる補償抵抗を求めてグラフに表したのが，図 136です．このグラフを描く関数は，以下のようになります．

```
function ()
{
    # OPT1 次側による位相補償

    rp <- c(1.35e3, 23e3)       # 内部抵抗
```

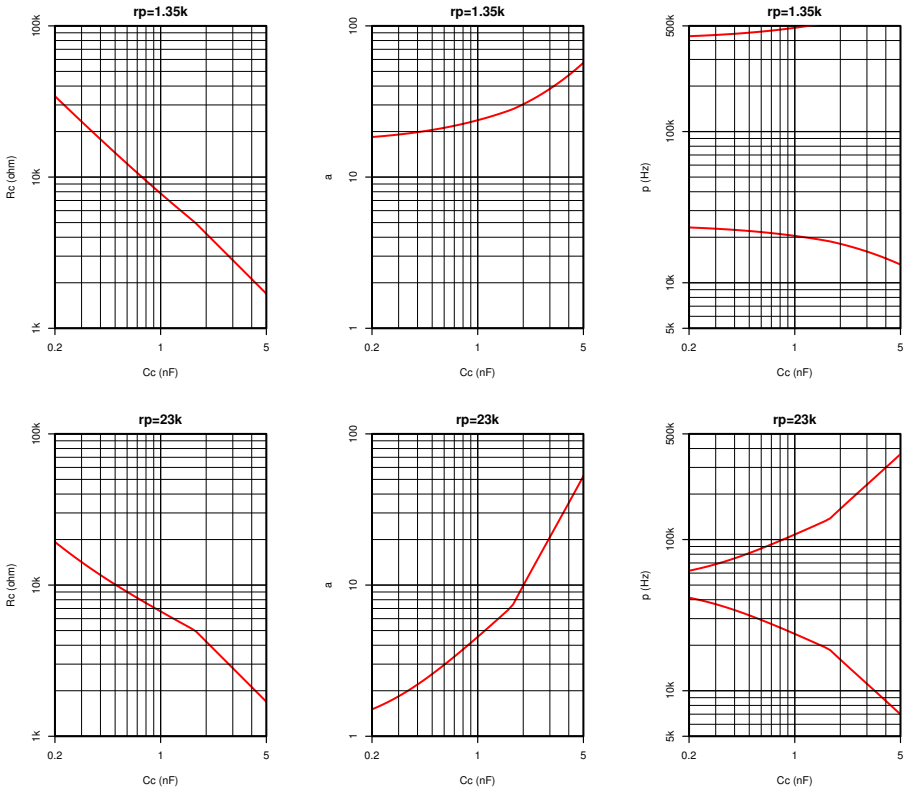

図 136: OPT 1 次側の位相補償の最適補償容量と補償抵抗

```
        Ll <- 42.3e-3               # 漏れインダクタンス
        Cs <- 284e-12               # 浮遊容量
        RL <- 5e3                   # 負荷抵抗
        Cc <- dec(0.2, 5.1, 30) * 1e-9  # 補償容量
        par(mfrow=c(2, 3))
        for (j in seq(along=rp)) {
            z <- matrix(NA, length(Cc), 4,  # 各補償容量に対する最適な補償抵抗などを
                dimnames=list(Cc, c("Rc", "a", "p1", "p3")))    # 格納する領域
            for (i in seq(along=Cc)) {
                z[i, "Rc"] <- uniroot(function(Rc) {
                    pz <- optpc1(rp=rp[j], Ll=Ll, Cs=Cs, RL=RL, Rc=Rc, Cc=Cc[i])
                    abs(pz$p[2]) - abs(pz$z)    # 第 2 のポールとゼロが等しくなる
                }, c(100, 100e3))$root          # 補償抵抗を求める
                pz <- optpc1(rp=rp[j], Ll=Ll, Cs=Cs, RL=RL, Rc=z[i, "Rc"], Cc=Cc[i])
                z[i, "p1"] <- abs(pz$p[1])      # 最適な補償抵抗を使用した場合の p1
                z[i, "p3"] <- abs(pz$p[3])      # 最適な補償抵抗を使用した場合の p3
            }
            title <- paste("rp=", eunit(rp[j]), "\n", sep="")
            z[, "a"] <- z[, "p3"]/z[, "p1"]     # 補償後のスタガ比
            logplot(Cc*1e9, z[, "Rc"], type="l", col="red", main=title,
                xlab="Cc (nF)", ylab="Rc (ohm)", xlim=c(0.2, 5), ylim=c(1e3, 100e3))
            logplot(Cc*1e9, z[, "a"], type="l", col="red", main=title,
                xlab="Cc (nF)", ylab="a", xlim=c(0.2, 5), ylim=c(1, 100))
            logplot(Cc*1e9, z[, 3:4]/2/pi, type="l", col="red", lty=1, main=title,
                xlab="Cc (nF)", ylab="p (Hz)", xlim=c(0.2, 5), ylim=c(5e3, 500e3))
        }
    }
```

関数の値が 0 になる変数の値を求める uniroot を使って，補償抵抗の値を探索しています．探索のための関数では，与えられた補償抵抗の候補値に対して，optpc1 を用いてポールとゼロの周波数を求め，$|p_2| - |z|$ を返しています．

グラフからわかるように，内部抵抗が低い方がスタガ比を大きく稼げます．下のグラフでは $C_c = 1600\,\mathrm{pF}$ あたりで線が曲がっていますが，これより補償容量が大きいと，実数の p_2 と z が等しくなり，これより補償容量が小さいと，複素数の p_2 (の絶対値) と z が等しくなります．

11.3 2 次側の位相補償

出力トランスの 2 次側で積分型の位相補償を行なった場合の等価回路は，図 137のように表せます．

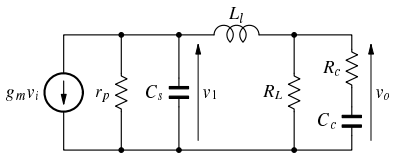

図 137: 出力トランスの 2 次側の位相補償

出力段の伝達関数を求めます．

$$
\begin{aligned}
Z_L &= R_L // (R_c + Z_{C_c}) \\
&= \frac{1}{\frac{1}{R_L} + \frac{1}{R_c + \frac{1}{sCc}}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{\frac{1}{R_L} + \frac{sC_c}{sC_cR_c+1}} \\
&= \frac{R_L(sC_cR_c+1)}{sC_cR_c + 1 + sC_cR_L} \\
&= \frac{R_L(sC_cR_c+1)}{sC_c(R_c+R_L)+1} \\
v_1 &= -g_m v_i [r_p // Z_{C_s} // (Z_{L_l} + Z_L)] \\
&= -\frac{g_m v_i}{\frac{1}{r_p} + sC_s + \frac{1}{sL_l+Z_L}} \\
&= -\frac{g_m r_p (sL_l + Z_L) v_i}{(sL_l+Z_L)(1+sC_sr_p) + r_p} \\
v_o &= v_1 \frac{Z_L}{Z_{L_l} + Z_L} \\
&= -\frac{g_m r_p Z_L v_i}{(sL_l+Z_L)(1+sC_sr_p) + r_p} \\
&= -\frac{g_m r_p \frac{R_L(sC_cR_c+1)}{sC_c(R_c+R_L)+1} v_i}{[sL_l + \frac{R_L(sC_cR_c+1)}{sC_c(R_c+R_L)+1}](1+sC_sr_p) + r_p} \\
&= -\frac{g_m r_p R_L (sC_cR_c+1) v_i}{\{sL_l[sC_c(R_c+R_L)+1] + R_L(sC_cR_c+1)\}(1+sC_sr_p) + r_p[sC_c(R_c+R_L)+1]} \\
&= -\frac{g_m r_p R_L (sC_cR_c+1) v_i}{s^3 L_l C_c C_s r_p (R_c+R_L) + s^2\{L_l[C_c(R_c+R_L)+C_sr_p] + C_cC_sr_pR_cR_L\} + s\{L_l + C_sr_pR_L + C_c[r_pR_L + R_C(r_p+R_L)]\} + r_p +} \\
&= -g_m(r_p // R_L) v_i \cdot \frac{sC_cR_c+1}{a_3s^3 + a_2s^2 + a_1s + 1}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
a_3 &= \frac{L_l C_c C_s r_p (R_c+R_L)}{r_p + R_L} \\
a_2 &= \frac{L_l[C_c(R_c+R_L) + C_sr_p] + C_cC_sr_pR_cR_L}{r_p+R_L} \\
a_1 &= \frac{L_l + C_sr_pR_L + C_c[r_pR_L + R_C(r_p+R_L)]}{r_p+R_L}
\end{aligned}
$$

11.3.1 数値例

1 次側の位相補償と同じ例を使います．プログラムは，optpc1 を optpc2 に変更するだけで使えます．関数 optpc2 は，OPT の 2 次側で位相補償をした場合のポールとゼロを求める関数で，内容は以下のとおりです．

```
function(rp, Cs, Ll, RL, Rc, Cc)
{
    a3 <- Ll * Cc * Cs * rp * (Rc + RL)
    a2 <- Ll * (Cc * (Rc + RL) + Cs * rp) + Cc * Cs * rp * Rc * RL
    a1 <- Ll + Cs * rp * RL + Cc * (rp * RL + Rc * (rp + RL))
    a0 <- rp + RL
    p <- tri(a3, a2, a1, a0)
    o <- order(abs(p))
    z <- -1/(Cc * Rc)
    list(p=p[o], z=z)
}
```

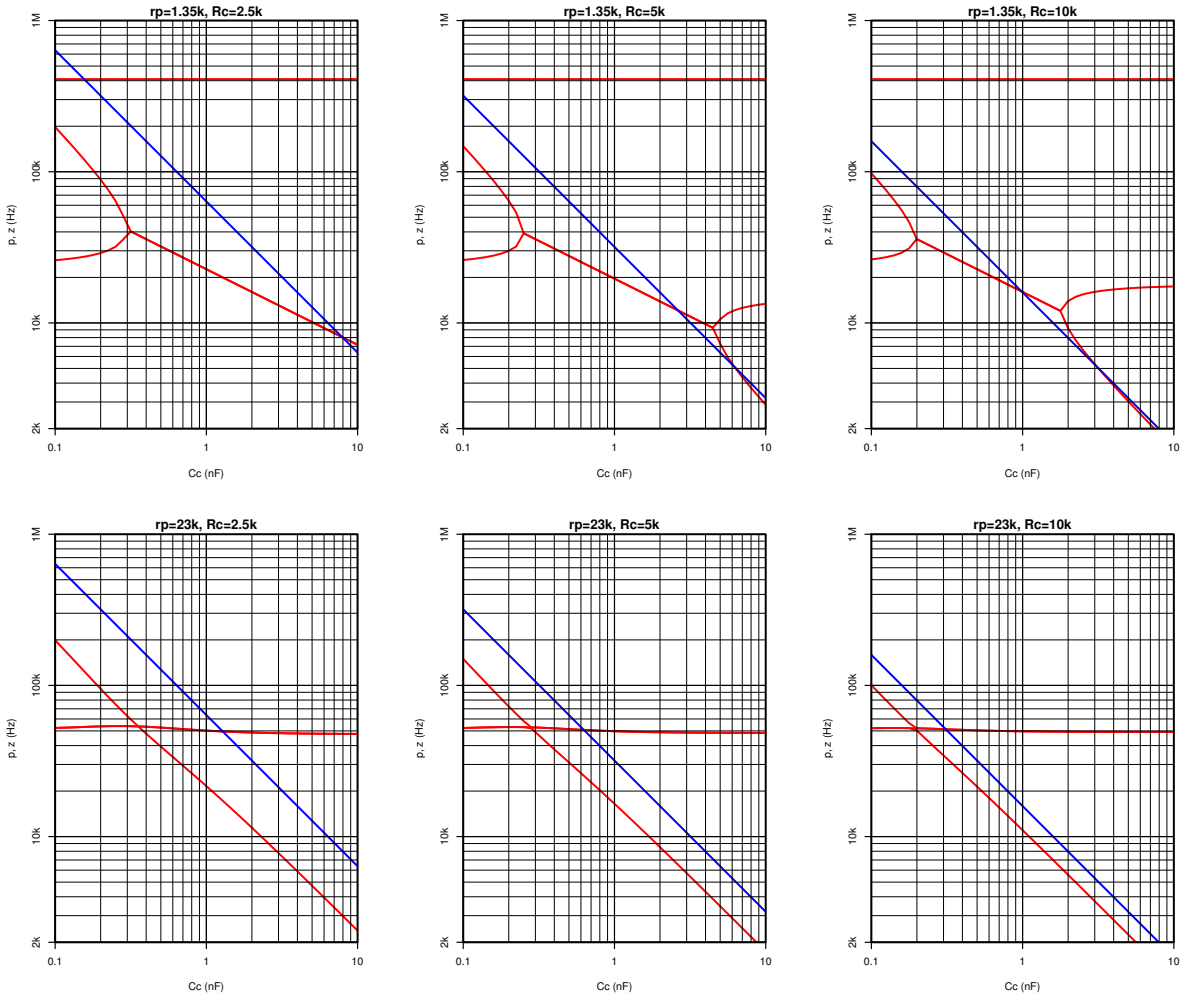

図 138: OPT 2 次側の位相補償のポールとゼロ

結果は，図 138のようになります．内部抵抗が高いと，p_3 が低くなって，ある程度以上の補償容量では p_2 と p_3 が共役の複素数になります．

ある補償容量に対して，$p_2 = z$ となる補償抵抗を求めてグラフに表したのが，図 139です．

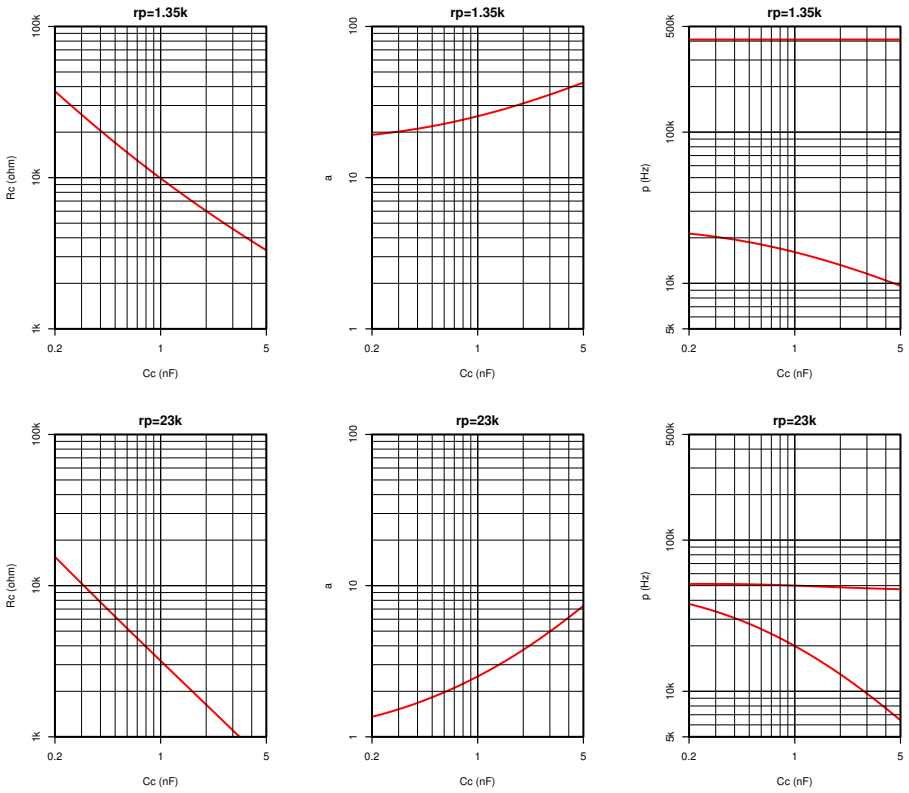

図 139: OPT 2 次側の位相補償の最適補償容量と補償抵抗

グラフからわかるように，内部抵抗が高いと，ほとんどスタガ比が得られません．この補償方法は，三極管やウルトラリニア接続に向いているようです．

このグラフの補償容量，補償抵抗は，1 次換算の値ですので，実際に 2 次側に入れる時は，インピーダンスの比だけ抵抗は小さく，容量は大きくします．たとえば，巻線比が 25 : 1 の場合は，抵抗は 1/625 に，コンデンサの容量は 625 倍にします．

A　公式

A.1　三角関数

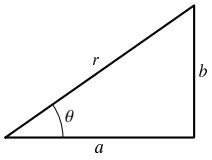

図 140: 三角比

三角比と三角関数

$$\sin\theta = \frac{b}{r} \tag{377}$$

$$\cos\theta = \frac{a}{r} \tag{378}$$

$$\tan\theta = \frac{b}{a} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \tag{379}$$

$$\theta = \sin^{-1}\frac{b}{r} = \cos^{-1}\frac{a}{r} = \tan^{-1}\frac{b}{a} \tag{380}$$

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = \frac{b^2}{r^2} + \frac{a^2}{r^2} = \frac{a^2+b^2}{r^2} = 1 \tag{381}$$

微積分

$$\frac{d\sin x}{dx} = \cos x \tag{382}$$

$$\frac{d\cos x}{dx} = -\sin x \tag{383}$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x \tag{384}$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x \tag{385}$$

加法定理

$$\sin(a \pm b) = \sin a\cos b \pm \cos a\sin b \tag{386}$$

$$\cos(a \pm b) = \cos a\cos b \mp \sin a\sin b \tag{387}$$

$$\tan(a \pm b) = \frac{\tan a \pm \tan b}{1 \mp \tan a\tan b} \tag{388}$$

オイラーの公式

$$e^{jx} = \cos x + j\sin x \tag{389}$$

$$\cos x = \frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2} \tag{390}$$

$$\sin x = \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j} \tag{391}$$

A.2 双曲線関数

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \tag{392}$$

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \tag{393}$$

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} \tag{394}$$

A.3 ラプラス変換

関数 $f(x)$ のラプラス変換 $F(s)$ は，次の式で定義される．

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-sx} f(x)\, dx \tag{395}$$

入力信号をラプラス変換したものと伝達関数とを掛け合わせたものをラプラス逆変換すると，出力信号が得られます．

$F(s)$	$f(t)$
1	impulse
$\frac{1}{s}$	1 (unit step)
$\frac{1}{s+a}$	e^{-at}
$\frac{1}{s^2}$	t
$\frac{1}{s(s+a)}$	$\frac{1}{a}(1-e^{-at})$
$\frac{1}{(s+a)(s+b)}$	$\frac{1}{b-a}(e^{-at}-e^{-bt})$
$\frac{s}{(s+a)(s+b)}$	$\frac{1}{a-b}(ae^{-at}-be^{-bt})$
$\frac{1}{(s+a)^2}$	te^{-at}
$\frac{s}{(s+a)^2}$	$te^{-at}(1-at)$
$\frac{1}{s^2-a^2}$	$\frac{1}{a}\sinh(at)$
$\frac{s}{s^2-a^2}$	$\cosh(at)$
$\frac{1}{s^2+a^2}$	$\frac{1}{a}\sin(at)$
$\frac{s}{s^2+a^2}$	$\cos(at)$
$\frac{1}{(s+b)^2+a^2}$	$\frac{1}{a}e^{-bt}\sin(at)$
$\frac{s}{(s+b)^2+a^2}$	$e^{-bt}\left(\cos(at)-\frac{b}{a}\sin(at)\right)$
$\frac{1}{s(s+a)^2}$	$\frac{1}{a^2}(1-e^{-at}-ate^{-at})$
$\frac{1}{s(s+a)(s+b)}$	$\frac{1}{ab(a-b)}[(a-b)+be^{-at}-ae^{-bt}]$
$\frac{1}{s[(s+b)^2+a^2]}$	$\frac{1}{a^2+b^2}\left[1-e^{-bt}\left(\cos at+\frac{b}{a}\sin at\right)\right]$

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{1}{s(s+a)} \\ &= \frac{1/a}{s} - \frac{1/a}{s+a} \\ &= \frac{1}{a}\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+a}\right) \\ f(t) &= \frac{1}{a}(1-e^{-at}) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
F(s) &= \frac{1}{(s+a)(s+b)} \\
&= \frac{\frac{1}{-a+b}}{s+a} + \frac{\frac{1}{a-b}}{s+b} \\
&= \frac{1}{b-a}\left(\frac{1}{s+a} - \frac{1}{s+b}\right) \\
f(t) &= \frac{1}{b-a}(e^{-at} - e^{-bt})
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
F(s) &= \frac{s}{(s+a)(s+b)} \\
&= \frac{\frac{-a}{-a+b}}{s+a} + \frac{\frac{-b}{a-b}}{s+b} \\
&= \frac{1}{a-b}\left(\frac{a}{s+a} - \frac{b}{s+b}\right) \\
f(t) &= \frac{1}{a-b}(ae^{-at} - be^{-bt})
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
F(s) &= \frac{1}{s^2-a^2} \\
&= \frac{1}{(s-a)(s+a)} \\
&= \frac{\frac{1}{2a}}{s-a} + \frac{\frac{1}{-2a}}{s+a} \\
&= \frac{1}{2a}\left(\frac{1}{s-a} - \frac{1}{s+a}\right) \\
f(t) &= \frac{1}{2a}(e^{at} - e^{-at}) \\
&= \frac{1}{a}\sinh at
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
F(s) &= \frac{s}{s^2-a^2} \\
&= \frac{s}{(s-a)(s+a)} \\
&= \frac{\frac{a}{2a}}{s-a} + \frac{\frac{-a}{-2a}}{s+a} \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-a} + \frac{1}{s+a}\right) \\
f(t) &= \frac{1}{2}(e^{at} + e^{-at}) \\
&= \cosh at
\end{aligned}
$$

$$
F(s) = \frac{1}{s^2+a^2}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{(s-ja)(s+ja)} \\
&= \frac{\frac{1}{2ja}}{s-ja} + \frac{\frac{1}{-2ja}}{s+ja} \\
&= \frac{1}{2ja}\left(\frac{1}{s-ja} - \frac{1}{s+ja}\right) \\
f(t) &= \frac{1}{2ja}(e^{jat} - e^{-jat}) \\
&= \frac{1}{a}\sin at
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
F(s) &= \frac{s}{s^2+a^2} \\
&= \frac{s}{(s-ja)(s+ja)} \\
&= \frac{\frac{ja}{2ja}}{s-ja} + \frac{\frac{-ja}{-2ja}}{s+ja} \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-ja} + \frac{1}{s+ja}\right) \\
f(t) &= \frac{1}{2}(e^{jat} + e^{-jat}) \\
&= \cos at
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
F(s) &= \frac{1}{(s+b)^2+a^2} \\
&= \frac{1}{(s+b-ja)(s+b+ja)} \\
&= \frac{\frac{1}{-b+ja+b+ja}}{s+b-ja} + \frac{\frac{1}{-b-ja+b-ja}}{s+b+ja} \\
&= \frac{\frac{1}{2ja}}{s+b-ja} + \frac{\frac{1}{-2ja}}{s+b+ja} \\
&= \frac{1}{2ja}\left(\frac{1}{s+b-ja} - \frac{1}{s+b+ja}\right) \\
f(t) &= \frac{1}{2ja}(e^{(-b+ja)t} - e^{(-b-ja)t}) \\
&= \frac{1}{2ja}(e^{-bt}e^{jat} - e^{-bt}e^{-jat}) \\
&= \frac{1}{2ja}e^{-bt}(e^{jat} - e^{-jat}) \\
&= \frac{1}{a}e^{-bt}\sin at
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
F(s) &= \frac{s}{(s+b)^2+a^2} \\
&= \frac{s}{(s+b-ja)(s+b+ja)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\frac{-b+ja}{-b+ja+b+ja}}{s+b-ja} + \frac{\frac{-b-ja}{-b-ja+b-ja}}{s+b+ja} \\
&= \frac{\frac{-b+ja}{2ja}}{s+b-ja} + \frac{\frac{-b-ja}{-2ja}}{s+b+ja} \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s+b-ja} + \frac{1}{s+b+ja}\right) - \frac{b}{2ja}\left(\frac{1}{s+b-ja} - \frac{1}{s+b+ja}\right) \\
f(t) &= \frac{1}{2}(e^{(-b+ja)t} + e^{(-b-ja)t}) - \frac{b}{2ja}(e^{(-b+ja)t} - e^{(-b-ja)t}) \\
&= \frac{1}{2}(e^{-bt}e^{jat} + e^{-bt}e^{-jat}) - \frac{b}{2ja}(e^{-bt}e^{jat} - e^{-bt}e^{-jat}) \\
&= \frac{1}{2}e^{-bt}(e^{jat} + e^{-jat}) - \frac{b}{2ja}e^{-bt}(e^{jat} - e^{-jat}) \\
&= +e^{-bt}\cos at - \frac{b}{a}e^{-bt}\sin at \\
&= e^{-bt}\left(\cos at - \frac{b}{a}\sin at\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
F(s) &= \frac{1}{s(s+a)(s+b)} \\
&= \frac{\frac{1}{ab}}{s} + \frac{\frac{1}{-a(-a+b)}}{s+a} + \frac{\frac{1}{-b(-b+a)}}{s+b} \\
&= \frac{\frac{1}{ab}}{s} + \frac{\frac{1}{a(a-b)}}{s+a} + \frac{\frac{1}{b(b-a)}}{s+b} \\
&= \frac{1}{ab(a-b)}\left(\frac{a-b}{s} + \frac{b}{s+a} - \frac{a}{s+b}\right) \\
f(t) &= \frac{1}{ab(a-b)}((a-b) + be^{-at} - ae^{-bt})
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
F(s) &= \frac{1}{s[(s+b)^2 + a^2]} \\
&= \frac{1}{s(s+b-ja)(s+b+ja)} \\
&= \frac{\frac{1}{(b-ja)(b+ja)}}{s} + \frac{\frac{1}{-b+ja(-b+ja+b+ja)}}{s+b-ja} + \frac{\frac{1}{-b-ja(-b-ja+b-ja)}}{s+b+ja} \\
&= \frac{\frac{1}{b^2+a^2}}{s} + \frac{\frac{1}{2ja(ja-b)}}{s+b-ja} + \frac{\frac{1}{2ja(ja+b)}}{s+b+ja} \\
&= \frac{\frac{1}{b^2+a^2}}{s} - \frac{\frac{ja+b}{2ja(a^2+b^2)}}{s+b-ja} - \frac{\frac{ja-b}{2ja(a^2+b^2)}}{s+b+ja} \\
&= \frac{1}{a^2+b^2}\left(\frac{1}{s} - \frac{\frac{ja+b}{2ja}}{s+b-ja} - \frac{\frac{ja-b}{2ja}}{s+b+ja}\right) \\
&= \frac{1}{a^2+b^2}\left[\frac{1}{s} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s+b-ja} + \frac{1}{s+b+ja}\right) - \frac{b}{2ja}\left(\frac{1}{s+b-ja} - \frac{1}{s+b+ja}\right)\right. \\
f(t) &= \frac{1}{a^2+b^2}\left[1 - \frac{1}{2}(e^{(-b+ja)t} + e^{(-b-ja)t}) - \frac{b}{2ja}(e^{(-b+ja)t} - e^{(-b-ja)t})\right] \\
&= \frac{1}{a^2+b^2}\left[1 - \frac{1}{2}e^{-bt}(e^{jat} + e^{-jat}) - \frac{b}{2ja}e^{-bt}(e^{jat} - e^{-jat})\right]
\end{aligned}
$$

$$= \frac{1}{a^2+b^2}\left(1 - e^{-bt}\cos at - \frac{b}{a}e^{-bt}\sin at\right)$$
$$= \frac{1}{a^2+b^2}\left[1 - e^{-bt}\left(\cos at - \frac{b}{a}\sin at\right)\right]$$

A.3.1 1 次低域通過伝達関数

$$F(s) = \frac{\frac{1}{sC}}{R + \frac{1}{sC}} = \frac{1}{sCR + 1} = \frac{\frac{1}{CR}}{s + \frac{1}{CR}} = \frac{\omega_0}{s + \omega_0} \tag{396}$$

インパルスレスポンス

$$\begin{aligned} V_2(s) &= F(s)V_1(s) \\ &= F(s) \\ &= \frac{\omega_0}{s + \omega_0} \\ v_2(t) &= \omega_0 e^{-\omega_0 t} \end{aligned}$$

インディシャルレスポンス

$$\begin{aligned} V_2(s) &= F(s)V_1(s) \\ &= F(s) \cdot \frac{1}{s} \\ &= \frac{\omega_0}{s(s + \omega_0)} \\ v_2(t) &= 1 - e^{-\omega_0 t} \end{aligned}$$

A.3.2 2 次低域通過伝達関数

$$F(s) = \frac{\omega_0^2}{s^2 + \frac{\omega_0}{Q}s + \omega_0^2} \tag{397}$$

$D = \frac{\omega_0^2}{Q^2} - 4\omega_0^2 = \omega_0^2(1/Q^2 - 4)$ とする.

$D > 0$ すなわち $Q < 1/2$ の場合

$$\begin{aligned} p &= -\frac{\omega_0}{2Q} \pm \frac{\omega_0}{2}\sqrt{\frac{1}{Q^2} - 4} \\ &= \alpha \pm \beta \\ p_1 + p_2 &= 2\alpha = -\frac{\omega_0}{Q} \\ p_1 - p_2 &= 2\beta = \omega_0\sqrt{\frac{1}{Q^2} - 4} \end{aligned}$$

インパルスレスポンス

$$\begin{aligned} V_2(s) &= F(s) \\ &= \frac{\omega_0^2}{s^2 + \frac{\omega_0}{Q}s + \omega_0^2} \\ &= \frac{\omega_0^2}{(s - p_1)(s - p_2)} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
v_2(t) &= \frac{\omega_0^2}{p_1 - p_2}(e^{p_1 t} - e^{p_2 t}) \\
&= \frac{\omega_0^2}{2\beta}(e^{(\alpha+\beta)t} - e^{(\alpha-\beta)t}) \\
&= \frac{\omega_0^2}{2\beta} e^{\alpha t}(e^{\beta t} - e^{-\beta t}) \\
&= \frac{2\omega_0}{\sqrt{\frac{1}{Q^2} - 4}} e^{\alpha t} \sinh \beta t
\end{aligned}
$$

インディシャルレスポンス

$$
\begin{aligned}
V_2(s) &= \frac{F(s)}{s} \\
&= \frac{\omega_0^2}{s(s^2 + \frac{\omega_0}{Q}s + \omega_0^2)} \\
&= \frac{\omega_0^2}{s(s - p_1)(s - p_2)} \\
v_2(t) &= \frac{\omega_0^2}{p_1 p_2 (p_2 - p_1)}[(p_2 - p_1) - p_2 e^{p_1 t} + p_1 e^{p_2 t}] \\
&= \frac{1}{p_2 - p_1}[(p_2 - p_1) - p_2 e^{(\alpha+\beta)t} + p_1 e^{(\alpha-\beta)t}] \\
&= 1 - \frac{1}{p_2 - p_1} e^{\alpha t}(p_2 e^{\beta t} - p_1 e^{-\beta t}) \\
&= 1 + \frac{1}{2\beta} e^{\alpha t}[(\alpha - \beta)e^{\beta t} - (\alpha + \beta)e^{-\beta t}] \\
&= 1 + \frac{1}{2\beta} e^{\alpha t}[\alpha(e^{\beta t} - e^{-\beta t}) - \beta(e^{\beta t} + e^{-\beta t})] \\
&= 1 + \frac{1}{\beta} e^{\alpha t}(\alpha \sinh \beta t - \beta \cosh \beta t)
\end{aligned}
$$

$D = 0$ すなわち $Q = 1/2$ の場合

インパルスレスポンス

$$
\begin{aligned}
V_2(s) &= F(s) \\
&= \frac{\omega_0^2}{s^2 + 2\omega_0 s + \omega_0^2} \\
&= \frac{\omega_0^2}{(s + \omega_0)^2} \\
v_2(s) &= \omega_0^2 t e^{-\omega_0 t}
\end{aligned}
$$

インディシャルレスポンス

$$
\begin{aligned}
V_2(s) &= \frac{F(s)}{s} \\
&= \frac{\omega_0^2}{s(s^2 + 2\omega_0 Q s + \omega_0^2)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\omega_0^2}{s(s+\omega_0)^2} \\
v_2(t) &= 1 - e^{-\omega_0 t} - \omega_0 t e^{-\omega_0 t} \\
&= 1 - e^{-\omega_0 t}(1+\omega_0 t)
\end{aligned}
$$

$D < 0$ すなわち $Q > 1/2$ の場合

$$
\begin{aligned}
b &= \frac{\omega_0}{2Q} \\
a &= \frac{\omega_0}{2}\sqrt{4 - \frac{1}{Q^2}}
\end{aligned}
$$

とおけば,

$$
F(s) = \frac{\omega_0^2}{(s+b)^2 + a^2}
$$

インパルスレスポンス

$$
\begin{aligned}
V_2(s) &= F(s) \\
&= \frac{\omega_0^2}{(s+b)^2 + a^2} \\
v_2(t) &= \frac{\omega_0^2}{a} e^{-bt} \sin at \\
&= \frac{2\omega_0}{\sqrt{4 - \frac{1}{Q^2}}} e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t} \sin \frac{\omega_0}{2}\sqrt{4 - \frac{1}{Q^2}}\, t
\end{aligned}
$$

インディシャルレスポンス

$$
\begin{aligned}
V_2(s) &= \frac{F(s)}{s} \\
&= \frac{\omega_0^2}{s[(s+b)^2 + a^2]} \\
v_2(t) &= \frac{\omega_0^2}{a^2 + b^2}[1 - e^{-bt}(\cos at + \frac{b}{a}\sin at)] \\
&= 1 - \frac{\omega_0}{a} e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t} \sin(at + \tan^{-1}\frac{a}{b})
\end{aligned}
$$

参考文献

[1] Paul R. Gray，Stephen H. Lewis，Paul J. Hurst，Robert G. Meyer 著, 浅田邦博, 永田穣訳. システム LSI のためのアナログ集積回路設計技術 (下). 培風館, 第 4 版, 2003.

[2] S. Rosenstark 著, 奥沢熙訳. フィードバック増幅器の理論と解析. 現代工学社, 1987.