

多重帰還型 LPF の現実的な定数を求める方法

Ayumi's Lab.

2007 年 4 月 6 日

Revised 2009 年 8 月 2 日

多重帰還型フィルタは、歪みが少ないため、オーディオ用途に適しています。多重帰還型 LPF は、3 本の抵抗と 2 個のコンデンサで遮断角周波数 ω_0 、 Q 、通過域のゲイン K が決定されますが、一般に、ゲインを 1 とし、3 本の抵抗を同じ値とし、 Q の値によって 2 個のコンデンサの容量の比を定めます。しかし、一般に入手可能なコンデンサの種類は少なく、E12 系列が入手できることはまれで、E6 系列で設計できるとありがたいものです。望む Q の値を実現するには、複数のコンデンサを並列にすることが多いようです。コンデンサは 1 個あたりの価格が抵抗に比べて高いため、コンデンサの数を最小限にし、抵抗を複数使うほうがアマチュアにとっては現実的でしょう。E24 系列の抵抗を入手するのは容易なので、複数の抵抗を直列や並列につなげば、必要とされる値をかなり正確に得ることができます。ここでは、2 次のフィルタに 2 個のコンデンサのみを使用して、任意の ω_0 、 Q 、 K を持つフィルタの定数を求める方法を紹介します。

1 多重帰還型 LPF の特性

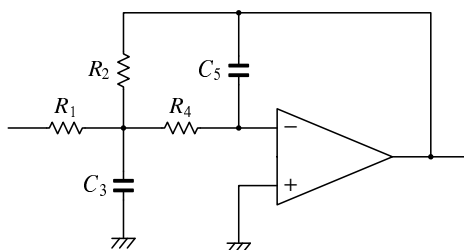


図 1: 多重帰還型 LPF の回路

図 1 の回路の多重帰還型 LPF の伝達特性と ω_0 、 Q の値は、

$$T(s) = -\frac{R_2/R_1}{s^2 C_3 C_5 R_2 R_4 + s C_5 (\frac{R_2 R_4}{R_1} + R_2 + R_4) + 1} \quad (1)$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{C_3 C_5 R_2 R_4}} \quad (2)$$

$$Q = \frac{\sqrt{C_3 C_5 R_2 R_4}}{C_5 (\frac{R_2 R_4}{R_1} + R_2 + R_4)} \quad (3)$$

となります。通過域のゲインを $K = R_2/R_1$ とおけば、

$$T(s) = -\frac{K}{s^2 C_3 C_5 R_2 R_4 + s C_5 (\frac{R_2 R_4}{R_1} + R_2 + R_4) + 1}$$

$$Q = \frac{\sqrt{C_3 C_5 R_2 R_4}}{C_5 [R_2 + (1 + K) R_4]}$$

となります。

ここで、コンデンサおよび抵抗の比について、

$$\begin{aligned} R_2 &= m_r R \\ R_4 &= \frac{R}{m_r} \\ C_3 &= m_c C \\ C_5 &= \frac{C}{m_c} \end{aligned}$$

とおくと、

$$\omega_0 = \frac{1}{CR} \tag{4}$$

$$\begin{aligned} Q &= \frac{CR}{\frac{C}{m_c} [m_r R + (1 + K) \frac{R}{m_r}]} \\ &= \frac{m_c}{m_r + \frac{1+K}{m_r}} \end{aligned} \tag{5}$$

となります。

さまざまな K の値について、 m_r を変えながら Q の値を描くと、図2のようになります。図2は、

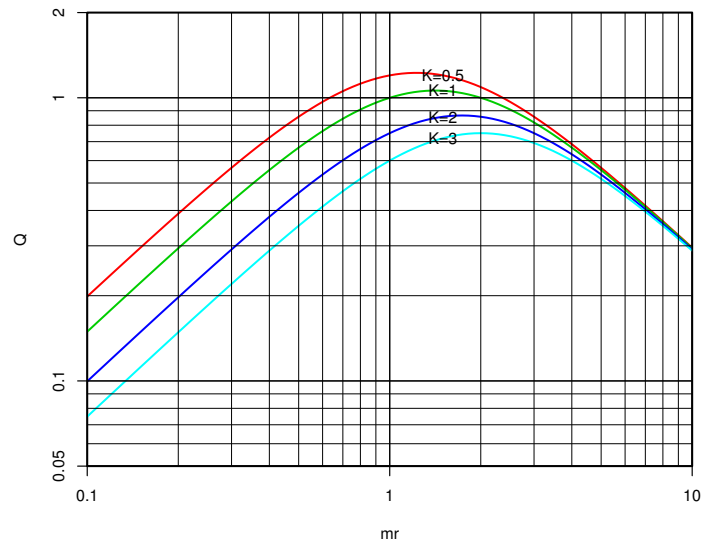


図2: m_r に対する Q の値 . ($m_c = 3$ の場合)

$m_c = 3$ の場合ですが、 Q は m_c に比例するので、異なった m_c の値に関するグラフは、図2の形状をそのまま上下にずらしたものになります。

常識的な $R_1 = R_2 = R_4$ の場合、すなわち $m_r = 1$ における値よりも大きな Q が得られる m_r が存在することがわかります。

この最大の Q となる m_r を利用すれば、一定の Q に対して m_c の値を小さく済ませることができます。指定された Q に対して m_c が最小となるのは、式(5)を m_c について解いた式の、 m_r に関す

る導関数値が0となる m_r のときです．

$$\begin{aligned} m_c &= Q[m_r + (1+K)\frac{1}{m_r}] \\ \frac{dm_c}{dm_r} &= Q[1 - (1+K)m_r^{-2}] = 0 \\ m_r &= \sqrt{1+K} \end{aligned}$$

したがって，

$$\min m_c = Q(\sqrt{1+K} + \frac{1+K}{\sqrt{1+K}}) \quad (6)$$

$$= 2Q\sqrt{1+K} \quad (7)$$

これ以上の m_c が確保されていれば， m_r を調整することによって， Q の値を目的の値に下げることができます． m_r の値は，式(5)より，

$$\begin{aligned} m_r + \frac{1+K}{m_r} &= \frac{m_c}{Q} \\ m_r^2 - \frac{m_c}{Q}m_r + (1+K) &= 0 \\ m_r &= \frac{\frac{m_c}{Q} \pm \sqrt{\frac{m_c^2}{Q^2} - 4(1+K)}}{2} \end{aligned}$$

ここで，図2より， m_r は2つの解を持ちますが， Q の極大値が必ず $m_r \geq 1$ にあるので，小さい方の解のほうが $m_r = 1$ に近くなります．抵抗の比は小さいほうが良いので，こちらの解を選びます．

2 サレンキー型 LPF の特性

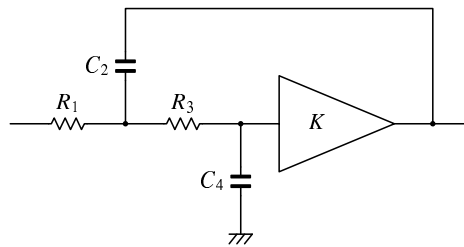


図3: サレンキー型 LPF の回路

図3の回路のサレンキー型 LPF の伝達特性と ω_0 , Q の値は，アンプのゲインを K とすると，

$$T(s) = \frac{K}{s^2 C_2 C_4 R_1 R_3 + s[C_4(R_1 + R_3) + (1-K)C_2 R_1] + 1} \quad (8)$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{C_2 C_4 R_1 R_3}} \quad (9)$$

$$Q = \frac{\sqrt{C_2 C_4 R_1 R_3}}{C_4(R_1 + R_3) + (1-K)C_2 R_1} \quad (10)$$

となります。しかし、サレンキー型 LPF で K の値を大きくすると、 Q の値が敏感になりすぎるので、ここでは $K = 1$ の場合のみを考えます。

ここで、コンデンサおよび抵抗の比について、

$$\begin{aligned} R_1 &= m_r R \\ R_3 &= \frac{R}{m_r} \\ C_2 &= m_c C \\ C_4 &= \frac{C}{m_c} \end{aligned}$$

とおくと、

$$\omega_0 = \frac{1}{CR} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} Q &= \frac{CR}{\frac{C}{m_c}(m_r + \frac{1}{m_r})R} \\ &= \frac{m_c}{m_r + \frac{1}{m_r}} \end{aligned} \quad (12)$$

となります。

Q は $m_r = 1$ のときに最大となります。指定された Q に対する m_c の最小値は、

$$\min m_c = 2Q \quad (13)$$

で、これ以上の m_c が確保されていれば、 m_r を調整することによって、 Q の値を目的の値に下げることができます。 m_r の値は、式 (12) より、

$$\begin{aligned} m_r + \frac{1}{m_r} &= \frac{m_c}{Q} \\ m_r^2 - \frac{m_c}{Q}m_r + 1 &= 0 \\ m_r &= \frac{\frac{m_c}{Q} \pm \sqrt{\frac{m_c^2}{Q^2} - 4}}{2} \end{aligned}$$

ここで、 m_r は 2 つの解を持ちますが、一方の解は他方の解の逆数となります。 R_1 が大きいほうが前段の負荷が軽くなりますので、ここでは $m_r \geq 1$ の解を選びます。

3 定数を求めるプログラム

フィルタの定数を求める R のプログラムを、以下に示します。

lpfparam.r

```
1 'lpfparam' <- function (w0, Q, K=1, type="SK", Rrange=c(5e3, 100e3), Cseries=E6)
2 {
3   # LPF の定数を求める
4   # w0: 遮断角周波数
5   # Q: Q
6   # K: 通過域のゲイン (サレンキー型の場合は無視される)
7   # type: "SK" (サレンキー型) または "MF" (多重帰還型)
8   # Rrange: 使用する抵抗値の範囲 (これよりいっくらか外れることもある)
9   # Cseries: 使用するコンデンサの系列の値
```

```

10 # 返値:
11 # type == "SK" の場合、6 列の行列
12 # 各列の値は、R1, C2, R3, C4, mr, mc
13 # type == "MF" の場合、7 列の行列
14 # 各列の値は、R1, R2, C3, R4, C5, mr, mc
15
16 if (type == "SK")
17   K <- 0
18   mc.min <- 2 * Q * sqrt(1 + K)
19   cat("mc.min=", mc.min, "\n", sep="")
20   z <- combr(mc.min^2, series=Cseries, func="/", mult=0:3, n=100, comp=">")
21   if (nrow(z) == 0)
22     stop("指定された仕様は満たせません。Q や K を小さくしてください。")
23   res <- NULL
24   for (i in seq(1:nrow(z))) {
25     Cm <- sqrt(z[i, 1] * z[i, 2]) # コンデンサの値の仮数部
26     mc <- sqrt(z[i, 1] / z[i, 2]) # コンデンサの、基準値からの比率
27     Ce <- log10(1 / (w0 * Rrange * Cm)) # 抵抗値が範囲に収まる
28     Ce <- ceiling(Ce[2]):floor(Ce[1]) # コンデンサの指数を求める
29     C <- Cm * 10^Ce # コンデンサの値
30     R <- 1 / (w0 * C) # 対応する抵抗の値
31
32     # 指定された Q となる抵抗の比を求める
33     b <- -mc / Q # 2 次方程式の一次項
34     c <- 1 + K # 2 次方程式の定数項
35     if (type == "SK") {
36       mr <- (-b + sqrt(b^2 - 4 * c)) / 2 # 2 次方程式の解
37       for (j in seq(along=C)) {
38         R1 <- R[j] * mr
39         R3 <- R[j] / mr
40         C2 <- C[j] * mc
41         C4 <- C[j] / mc
42         res1 <- c(R1, C2, R3, C4, mr, mc)
43         if (is.null(res))
44           res <- matrix(res1, nrow=1,
45             dimnames=list(NULL, c("R1", "C2", "R3", "C4", "mr", "mc")))
46         else if (match(signif(C2, 3), signif(res[, 2], 3), nomatch=0) == 0)
47           res <- rbind(res, res1)
48       }
49     } else if (type == "MF") {
50       mr <- (-b - sqrt(b^2 - 4 * c)) / 2 # 2 次方程式の解
51       for (j in seq(along=C)) {
52         R2 <- R[j] * mr
53         R4 <- R[j] / mr
54         R1 <- R2 / K
55         C3 <- C[j] * mc
56         C5 <- C[j] / mc
57         res1 <- c(R1, R2, C3, R4, C5, mr, mc)
58         if (is.null(res))
59           res <- matrix(res1, nrow=1,
60             dimnames=list(NULL, c("R1", "R2", "C3", "R4", "C5", "mr", "mc")))
61         else if (match(signif(C3, 3), signif(res[, 3], 3), nomatch=0) == 0)
62           res <- rbind(res, res1)
63       }
64     }
65   }
66   dimnames(res)[[1]] <- 1:nrow(res)
67   res
68 }

```

遮断周波数 w_0 は、角周波数で与えることに気を付けてください。通過域利得 K は、省略時の値として 1 が与えられているので、通常は指定する必要はありません。フィルタの種類 $type$ には、サレンキー型の場合は "SK" を、多重帰還型の場合は "MF" を指定します。使用する抵抗値の範囲 $Rrange$ は、長さが 2 のベクトルで与えます。基準となる抵抗の値 (R_2 と R_4 の幾何平均) がこの範囲になるようなコンデンサの値を使います。結果として、抵抗値がこの範囲を外れることもあります。Cseries には、コンデンサの系列の仮数部の値のベクトルを指定します。E6, E12, E24 という

ベクトルをあらかじめ用意してあります。

結果は 6 列 (サレンキー型の場合) または 7 列 (多重帰還型の場合) の行列で, 各行が 1 つの定数の組になっています。コンデンサの比 mc (6 列目または 7 列目) が小さい順になっています。最初のコンデンサの値が同じとなる定数の組は, 最も mc が小さいもの以外は捨ててあります。

遮断周波数 1 kHz で Q が 1 の多重帰還型フィルタのパラメータを求めた例を, 以下に示します。

```
> lpfparam(w0=2*pi*1e3, Q=1, type="MF")
mc.min=2.828427
      R1      R2      C3      R4      C5      mr      mc
1 19995.157 19995.157 2.2e-08 26174.000 2.2e-09 0.8740320 3.162278
2 43989.344 43989.344 1.0e-08 57582.799 1.0e-09 0.8740320 3.162278
3  4398.934  4398.934 1.0e-07  5758.280 1.0e-08 0.8740320 3.162278
4 29326.230 29326.230 1.5e-08 38388.533 1.5e-09 0.8740320 3.162278
5 13330.104 13330.104 3.3e-08 17449.333 3.3e-09 0.8740320 3.162278
6  9359.435  9359.435 4.7e-08 12251.659 4.7e-09 0.8740320 3.162278
7 64690.212 64690.212 6.8e-09 84680.587 6.8e-10 0.8740320 3.162278
8  6469.021  6469.021 6.8e-08  8468.059 6.8e-09 0.8740320 3.162278
9  2274.893  2274.893 1.5e-07 15793.931 4.7e-09 0.3795206 5.649327
10 1493.087  1493.087 2.2e-07 23367.842 3.3e-09 0.2527745 8.164966
```

最初の定数の組を使えば, $R_1 = 20\text{k}\Omega$, $R_2 = 20\text{k}\Omega$, $C_3 = 0.022\mu\text{F}$, $R_4 = 24 + 2.2\text{k}\Omega$, $C_5 = 2200\text{pF}$ とすればよいことがわかります。